Breviar teoretic

Funcții periodice

Definiție
Un triplet ordonat (A, B, f), unde A și B sunt două mulțimi, iar f este o lege de corespondență care face să corespundă fiecărui element din prima mulțime (A) un singur element din a doua mulțime (B) se numește **funcție definită pe** A **cu valori în** B.
Notăm $f : A \to B$.
Mulțimea A se numește domeniul de definiție al funcției, iar mulțimea B se numește codomeniul funcției.
Dacă A și B sunt mulțimi de numere reale ($A, B \subset \mathbb{R}$), atunci funcția se numește **funcție numerică**, sau **funcție reală, de variabilă reală**.

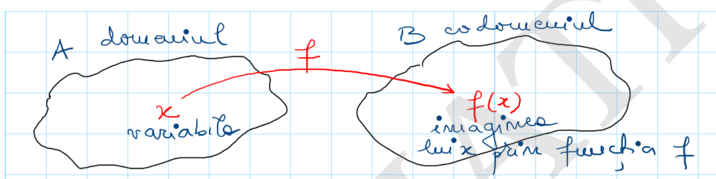

Figura 1: Funcție definită pe A cu valori în B

Observatii:

• Funcția se aplică doar elementelor din domeniul ei de definiție.

• Facem distincție între ”mulțimea de valori ale funcției” care este codomeniul și ”mulțimea valorilor funcției” care reprezintă imaginea funcției (notată $\mathrm{Im}(f)$).

• Uneori, mulțimea de valori (codomeniul) conține elemente în plus față de mulțimea valorilor funcției (imaginea funcției).

Definitie
O funcție numerică (o funcție reală, de variabilă reală) $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}$, se numește funcție periodică dacă $\exists T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât:
1. $x + T \in D, \forall x \in D$; 2. $f(x + T) = f(x), \forall x \in D$.
Numărul T se numește perioadă a funcției f.

În particular, dacă domeniul funcției este $\mathbb{R}$, definiția se interpretează astfel:

O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică, dacă $\exists T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Condiția $x+T\in\mathbb{R}$ este îndeplinită, dat fiind că $x,T\in\mathbb{R}$.

Exemple:

1. Funcția constantă este periodică.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=c,(c\in\mathbb{R}),\forall x\in\mathbb{R}$$

În acest caz, nu doar că există un număr real nenul T pentru care $f(x+T)=f(x)=c,\forall x\in\mathbb{R}$, ci pentru orice număr real T are loc această egalitate. Așadar, funcția constantă este periodică și orice număr real nenul este perioadă.

2. Funcția parte fracționară este periodică.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}$$

$$f(x+k)=\{x+k\}=\{x\}=f(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{Z}$$

Orice număr întreg nenul este perioadă a acestei funcții.

Există și funcții periodice care nu sunt definite pe $\mathbb{R}$!

3. Funcția tangentă este periodică, π fiind o perioadă a ei.

$$\text{tg}:\mathbb{R}\setminus\{\frac{(2k+1)\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$$

Să verificăm, în acest caz, că $x+\pi\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{(2k+1)\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{(2k+1)\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\}$.
Fie $x\in\mathbb{R}, x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}\forall k\in\mathbb{Z}$. Rezultă că $x+\pi\in\mathbb{R}$. Presupunem că $\exists p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x+\pi=\frac{(2p+1)\pi}{2}$. Ar rezulta că $x=\frac{(2p-1)\pi}{2}\in\{\frac{(2k+1)\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\}$ ceea ce contrazice alegerea lui x. Deci, $x+\pi\in D,\forall x\in D$, unde $D=\mathbb{R}\setminus\{\frac{(2k+1)\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\}$ și $\text{tg}(x+\pi)=\text{tg}(x),\forall x\in D$.

Teoremă
Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție periodică și $T\in\mathbb{R}^*$ perioadă a funcției f. Atunci $k\cdot T$ este perioadă a funcției $f,\forall k\in\mathbb{Z}$.

Demonstrație:
T perioadă $\Rightarrow x+T\in D,\forall x\in D$ și $f(x+T)=f(x),\forall x\in D$.

Vom demonstra în doi pași:
1) $k\cdot T$ este perioadă a funcției $f,\forall k\in\mathbb{N}^*$;
2) $-T$ este perioadă a funcției f.

La pasul 1) vom folosi metoda inducției matematice. Pentru $k=1$, $k\cdot T=T$ care este perioadă a funcției. Pentru $p\in\mathbb{N}^*$ fixat, presupunem că $p\cdot T$ este perioadă a funcției f și demonstrăm că $(p+1)\cdot T$ este perioadă.

$p\cdot T$ perioadă $\Rightarrow x+p\cdot T \in D, \forall x \in D$ și $f(x+p\cdot T) = f(x), \forall x \in D$.

Cum T este perioadă, rezultă că $x+p\cdot T+T \in D$ și $f(x) = f(x+p\cdot T) = f(x+p\cdot T+T) = f(x+(p+1)\cdot T), \forall x \in D$. Rezultă că $(p+1)\cdot T$ este perioadă pentru funcția f și, din principiul inducției matematice, rezultă că funcția are o infinitate de perioade, $k\cdot T, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Pasul 2): $x = (x-T)+T = (x+T)-T \in D, \forall x \in D$ și $f(x) = f((x-T)+T) \overset{\text{T perioadă}}{=} f(x-T), \forall x \in D$, de unde rezultă că $-T$ este perioadă. Aplicând, acestei perioade, pasul 1) rezultă $k\cdot(-T)$ este perioadă, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie, dacă T este perioadă a funcției f, atunci $k\cdot T$ este perioadă, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, deci, de îndată ce admite o perioadă, funcția admite o infinitate de perioade.

Definiție

Dacă $f: D \to \mathbb{R}$ este o funcție periodică și există T_0 cea mai mică perioadă pozitivă, atunci T_0 se numește **perioadă principală**.

Exemple:

1. Funcția parte fracționară este periodică, orice număr întreg nenul fiind perioadă. Cea mai mică perioadă pozitivă este cel mai mic număr întreg strict pozitiv, deci $T_0 = 1$ este perioada principală.

$$\{x+k\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$T = k \in \mathbb{Z}^*$ este perioadă și $T_0 = 1$ este perioada principală.

2. Funcția tangentă este periodică, orice număr de forma $k\cdot\pi$ fiind perioadă, iar cea mai mică perioadă pozitivă este $T_0 = \pi$, deci perioada principală este π.

3. Funcția lui Dirichlet, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1}$$

este periodică, orice număr rațional fiind perioadă, dar NU are perioadă principală.
Dacă $T \in \mathbb{Q}$, atunci $x+T \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}$ și $x+T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
Pentru $x \in \mathbb{Q}$ putem scrie

$$f(x+T) \overset{x+T\in\mathbb{Q}}{=} 1 = f(x),$$

iar pentru $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,

$$f(x+T) \overset{x+T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}{=} 0 = f(x).$$

Așadar, $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathbb{Q}$, adică orice număr rațional nenul este perioadă, dar cum nu există un cel mai mic număr rațional strict pozitiv, funcția lui Dirichlet nu are perioadă principală.

Aplicații*:

1.Dacă o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică, orice număr irațional fiind perioadă, atunci funcția este constantă.

Indicație:
$\forall T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow T$ este perioadă. Fixând $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, găsim $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, deci,
-pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și x este perioadă, deci $f(x+T) = f(x) = f(T)$
-pentru $x \in \mathbb{Q}, x+T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci $f(x+T) = f(T)$, dar $f(x) = f(x+T-T) \overset{\text{-T perioadă}}{=} f(x+T) = f(T)$
Așadar, $f(x) = f(T), \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este constantă.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, cu proprietatea $f(x+3) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că funcția este periodică.

Indicație:

$$x \to x+3 \Rightarrow f(x+6) = -\frac{1}{f(x)}$$
$$x \to x+3 \Rightarrow f(x+9) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$$
$$x \to x+3 \Rightarrow f(x+12) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcția este periodică, de perioadă $T = 12$.

3. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface proprietatea

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

este periodică.

Indicație:

$$f(x+2) + f(x) = \sqrt{2} \cdot f(x+1)$$

Deci,

$$f(x+2) = \sqrt{2} \cdot f(x+1) - f(x) = \sqrt{2}[\sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)] - f(x) = f(x) - \sqrt{2} \cdot f(x-1)$$

$$x \to x+2 \Rightarrow f(x+4) = f(x+2) - \sqrt{2} \cdot f(x+1) = f(x) - \sqrt{2} \cdot f(x-1) - \sqrt{2} \cdot [\sqrt{2} \cdot f(x) - f(x-1)] = -f(x)$$

$$x \to x+4 \Rightarrow f(x+8) = -f(x+4) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Funcția este periodică, de perioadă $T = 8$.

**Aplicațiile au fost propuse în culegerea ”Exerciții și probleme de ALGEBRĂ pentru concursuri și olimpiade școlare”, ediția îngrijită de Revista ”Tomis”, 1990, autori Gh. Andrei, I. Cucurezeanu, C. Caragea, Gh. Bordea.*