Unitatea de învățare	Elemente de logică matematică: propoziții, predicate, cuantificatori logici; operații logice elementare, corelare cu operațiile și relațiile cu mulțimi; raționament prin reducere la absurd; inducția matematică; probleme de numărare

Probleme de numărare

Reguli de numărare
Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi finite Dacă $\boldsymbol{M}$ este o mulțime finită și $\lvert\boldsymbol{M}\rvert = \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, atunci $\lvert\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M})\rvert = \boldsymbol{2^n}$.
Principiul includerii și excluderii pentru două mulțimi Dacă $\boldsymbol{A}$ și $\boldsymbol{B}$ sunt mulțimi finite, atunci $\lvert \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\rvert = \lvert\boldsymbol{A}\rvert + \lvert\boldsymbol{B}\rvert - \lvert\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\rvert$.
Principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi Dacă $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ și $\boldsymbol{C}$ sunt mulțimi finite, atunci $\lvert \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}\rvert = \lvert\boldsymbol{A}\rvert + \lvert\boldsymbol{B}\rvert + \lvert\boldsymbol{C}\rvert - \lvert\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\rvert - \lvert\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}\rvert - \lvert\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}\rvert + \lvert\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}\rvert$
Principiul includerii și excluderii pentru $\boldsymbol{n}$ mulțimi (generalizare[1]) Dacă $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$ sunt mulțimi finite, atunci $\left\lvert \bigcup_{k=1}^{n} \boldsymbol{A_k} \right\rvert = \sum_{k=1}^{n} \lvert\boldsymbol{A_k}\rvert - \sum_{1 \le i < j \le n} \lvert\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j}\rvert + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \lvert\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j} \cap \boldsymbol{A_k}\rvert - \cdots + (-\boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n+1}} \left\lvert \bigcap_{k=1}^{n} \boldsymbol{A_k} \right\rvert$
Regula produsului pentru două mulțimi Dacă $\boldsymbol{A}$ și $\boldsymbol{B}$ sunt mulțimi finite, atunci $\lvert\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\rvert = \lvert\boldsymbol{A}\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{B}\rvert$
Regula produsului pentru $\boldsymbol{n}$ mulțimi Dacă $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$ sunt mulțimi finite, atunci $\lvert\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \ldots \times \boldsymbol{A_n}\rvert = \lvert\boldsymbol{A_1}\rvert \cdot \lvert\boldsymbol{A_2}\rvert \cdot \ldots \cdot \lvert\boldsymbol{A_n}\rvert$

Numărul de submulțimi ale unei mulțimi finite

Fie M este o mulțime finită, cu n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$, $M = \emptyset$ (mulțimea vidă).

Pentru $n \geq 1$, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, iar numărul de elemente ale mulțimii se notează $card(M) = n$ sau $|M| = n$ și se numește cardinalul mulțimii M.

Atenție! Nu confundăm cardinalul unei mulțimi cu modulul unui număr real, deși notațiile pot fi identice. Din context deducem semnificația semnului $|\cdot|$.

Dacă M este o mulțime finită, notăm $P(M)$ mulțimea tuturor submulțimilor lui M, sau mulțimea părților lui M.

Teoremă:

[1] Se regăsește în secțiunea ”Pentru curioși și pasionați, dincolo de granițele programei școlare”.

Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$) este egal cu 2^n.

Demonstrația:

Vom demonstra teorema folosind inducția matematică, pentru propoziția

$$Q(n): Dacă\ A_n are\ n\ elemente, atunci\ |P(A_n)| = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Verificare: $Q(0): Dacă\ \ A_0\ are\ 0\ elemente, atunci\ |P(A_0)| = 2^0$.

Dacă A_0 are 0 elemente, atunci $A_0 = \emptyset$ care are o singură submulțime, și anume $\emptyset$, deci $|P(A_0)| = 1 = 2^0$. Așadar $Q(0)$ este adevărată.

Pasul inductiv: Pentru $k \in \mathbb{N}$ fixat, presupunem adevărată $Q(k): Dacă\ A_k are\ k\ elemente, atunci\ |P(A_k)| = 2^k$ și demonstrăm că este adevătată

$Q(k+1): Dacă\ A_{k+1} are\ k+1\ elemente, atunci\ |P(A_{k+1})| = 2^{k+1}$.

Fie $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ o mulțime cu $k+1$ elemente. Submulțimile lui A_{k+1} se împart în două categorii distincte:

-submulțimi care NU conțin elementul a_{k+1}

-submulțimi care conțin elementul a_{k+1}.

În prima categorie intră toate submulțimile mulțimii $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, acestea fiind în număr de 2^k, conform ipotezei de inducție.

Submulțimile care conțin elementul a_{k+1} se obțin adăugându-l pe a_{k+1} la fiecare submulțime din categoria anterioară, deci vor exista tot 2^k submulțimi din această categorie.

În concluzie, $|P(A_{k+1})| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, deci $Q(k+1)$ este adevărată, de unde rezultă că $Q(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1:

Dacă într-o cutie sunt 5 jucării, în câte moduri poate alege un copil să se joace, sau nu, cu acestea?

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să numeri submulțimile unei mulțimi cu 5 elemente.

Copilul poate alege să nu se joace cu niciuna, caz corespunzător mulțimii vide.

Copilul poate alege să se joace cu o jucărie, care poate fi oricare dintre cele 5, caz corespunzător submulțimilor formate dintr-un singur element.

Copilul poate alege să se joace cu două jucării, deci poate face diverse perechi de jucării, caz corespunzător submulțimilor cu două elemente.

În același mod poate decide să se joace în același timp cu 3,cu 4, sau cu toate 5.

Așadar, numărul total al posibilităților este egal cu numărul de submulțimi ale unei mulțimi cu 5 elemente, care este $2^5 = 32$.

Exemplul 2:

O editură prezintă cititorilor toate pachetele de cărți pe care le are la ofertă specială. Pachetele conțin câte un titlu, sau câte 2, sau câte 3, și așa mai departe. În total, oferta are 511 pachete disponibile pentru cititori. Câte titluri sunt cuprinse în oferta specială a editurii?

Pachetele prezentate de editură sunt toate submulțimile nevide ale unei mulțimi cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). Cum numărul total de submulțimi ale unei mulțimi finite este egal cu 2^n, iar mulțimea vidă este una singură, deducem că numărul de pachete este egal cu $2^n - 1$.

$$2^n - 1 = 511 \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow 2^n = 2^9 \Leftrightarrow n = 9.$$

Editura are 9 titluri în oferta ei specială.

Principiul includerii și excluderii pentru două mulțimi

Teoremă:

Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Demonstrația:

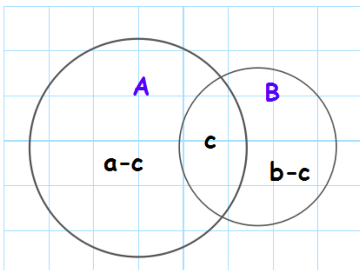
Vom nota $|A| = a \in \mathbb{N}$ și $|B| = b \in \mathbb{N}$.

Dacă mulțimile A și B sunt disjuncte, atunci $A \cap B = \emptyset$ și $|A \cap B| = 0$, iar în reuniune vom avea toate elementele celor două mulțimi, dat fiind că nu se repetă.

Deci $|A \cup B| = a + b - 0 = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Dacă mulțimile A și B nu sunt disjuncte, notăm $|A \cap B| = c$, adică cele două mulțimi au c elemente comune.

Dacă c elemente sunt comune, atunci numărul elementelor care aparțin doar lui A (nu și lui B) este $a - c$, iar numărul elementelor care aparțin doar lui B (nu și lui A) este $b - c$.



În reuniune vom avea elementele celor trei secțiuni distincte (mulțimi disjuncte):

-elementele care aparțin doar lui A (nu și lui B)

-elementele care aparțin doar lui B (nu și lui A)

-elementele comune mulțimilor A și B.

$$|A \cup B| = a - c + b - c + c = a + b - c = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exemplul 3:

Pentru organizarea a două ateliere, unul de pictură și unul de fotografie s-a lansat un apel de înscriere. În total sunt 48 de persoane care au depus cereri de înscriere. Dintre acestea, unele candidaturi sunt pentru ambele ateliere. Separând opțiunile, se constată că 25 de candidați optează pentru pictură și 32 pentru fotografie. Câți candidați vor să participe la ambele ateliere?

Notăm P mulțimea candidaților pentru atelierul de pictură și F mulțimea candidaților pentru atelierul de fotografie.

$|P \cup F| = 48$, $|P| = 25$ și $|F| = 32$

Dar $|P \cup F| = |P| + |F| - |P \cap F|$, deci $48 = 25 + 32 - |P \cap F|$, de unde $|P \cap F| = 57 - 48 = 9$.

Principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi

Dacă $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ și $\boldsymbol{C}$ sunt mulțimi finite, atunci

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Demonstrația:

Vom utiliza principiul includerii și excluderii pentru două mulțimi și proprietățile operațiilor cu mulțimi:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \ (\mathbf{1})$$

Dar $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ $(\mathbf{2})$ din principiul includerii și excluderii pentru două mulțimi, iar

$$|(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|,$$

ceea ce conduce la $|(A \cup B) \cap C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$ $(\mathbf{3})$.

Din (1), (2) și (3) rezultă concluzia.

Exemplul 4:

Într-o sală de spectacole sunt 100 de rânduri cu fotolii, unele cu dotări suplimentare. Din două în două rânduri, fotoliile au cotiere, din trei în trei rânduri fotoliile au tetiere, iar din cinci în cinci rânduri fotoliile au opțiune de înclinare a spătarului (numărătoarea începe totdeauna cu rândul numărul 1, de lângă scenă). Câte rânduri NU au fotolii speciale?

Notăm C mulțimea rândurilor cu fotolii care au cotiere, T mulțimea rândurilor cu fotolii care au tetiere S mulțimea rândurilor cu fotolii care au opțiune de înclinare a spătarului.

C-conține rândurile 2,4,6....-adică numerele divizibile cu 2 din mulțimea $\{1,2,3, \dots ,100\}$

T-conține rândurile 3,6,9,...-adică numerele divizibile cu 3 din mulțimea $\{1,2,3, \dots ,100\}$

S- conține rândurile 5,10,15,...-adică numerele divizibile cu 5 din mulțimea $\{1,2,3, \dots ,100\}$.

Se cere numărul de rânduri cu indicative care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5.

Vom afla numărul rândurilor cu fotolii speciale, adică numărul de elemente ale mulțimii $C \cup T \cup S$, apoi vom face diferența între numărul total de rânduri (100) și numărul de rânduri cu fotolii speciale.

$$|C \cup T \cup S| = |C| + |T| + |S| - |C \cap T| - |C \cap S| - |T \cap S| + |C \cap T \cap S|$$

$|C| = \left[\frac{100}{2}\right] = 50$, $[T] = \left[\frac{100}{3}\right] = 33$ și $|S| = \left[\frac{100}{5}\right] = 20$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

$$C \cap T = \{x \in \{1,2, \dots ,100\} | 2 \; divide \; x \; și \; 3 \; divide \; x\} = \{x \in \{1,2, \dots ,100\} | \; 6 \; divide \; x\}$$

Deci $|C \cap T| = \left[\frac{100}{6}\right] = 16.$

$$C \cap S = \{x \in \{1,2, \dots ,100\} | 2 \; divide \; x \; și \; 5 \; divide \; x\} = \{x \in \{1,2, \dots ,100\} | \; 10 \; divide \; x\}$$

Deci $|C \cap S| = \left[\frac{100}{10}\right] = 10.$

$$T \cap S = \{x \in \{1,2, \dots ,100\} | 3 \; divide \; x \; și \; 5 \; divide \; x\} = \{x \in \{1,2, \dots ,100\} | \; 15 \; divide \; x\}$$

Deci $|C \cap S| = \left[\frac{100}{15}\right] = 6.$

$C \cap T \cap S = \{x \in \{1,2,\dots,100\} | \ 2 \ divide \ x, 3 \ divide \ x \ \text{și} \ 5 \ divide \ x\}$
$\qquad\qquad\quad = \{x \in \{1,2,\dots,100\} | \ 30 \ divide \ x\}$

Deci $|C \cap T \cap S| = \left[\frac{100}{30}\right] = 3$.

În concluzie, $|C \cup T \cup S| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$.

Deci numărul de rânduri care nu conțin fotolii speciale este $100 - 74 = 16$.

Regula produsului pentru două mulțimi

Teoremă:

Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$

Demonstrația:

Dacă una dintre mulțimi este mulțimea vidă, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $|A \times B| = 0$, iar $|A| \cdot |B| = 0$ (unul dintre factori fiind 0), așadar $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 0$

Considerăm $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ cu $|A| = n,\ n \in \mathbb{N}^*$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, cu $|B| = m,\ m \in \mathbb{N}^*$.

$m \ linii$

$n \ coloane$

A\B → ↓	b_1	b_2	…	b_j	…	b_m
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	…	(a_1, b_j)	…	(a_1, b_m)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	…	(a_2, b_j)	…	(a_2, b_m)
…			…		…	
a_i	(a_i, b_1)	(a_i, b_2)	…	(a_i, b_j)	…	(a_i, b_m)
…	…	…	…	…	…	…
a_n	(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	…	(a_n, b_j)	…	(a_n, b_m)

Perechile ordonate din produsul cartezian sunt $n \cdot m$, deci $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.

Exemplul 5:

Două zaruri, colorate diferit, sunt aruncate simultan. Câte perechi de numere se pot obține, pe fețele de deasupra, prin aruncarea lor.

$Z_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Z_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Perechile de numere de pe fețele superioare sunt de forma $(a, b) \in Z_1 \times Z_2$. Numărul acestor perechi este egal cu $|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| = 6 \cdot 6 = 36$.

Regula produsului pentru n mulțimi

Teoremă:

Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ sunt mulțimi finite, atunci

$$|\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_n}| = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_n}|$$

Demonstrația:

Vom demonstra egalitatea folosind metoda inducției matematice, pentru propoziția matematică:

$$P(n): |\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_n}| = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_n}|, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Verificarea: $P(2)$: $|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$ adevărată- conform regulii produsului pentru două mulțimi, demonstrată anterior.

Pasul inductiv: Pentru $k \in \mathbb{N}. k \geq 2$ fixat, presupunem adevărată

$$P(k): |\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_k}| = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_k}| \text{ (ipoteză de inducție)}$$

și demonstrăm că este adevărată

$$P(k+1): |\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_k} \times \boldsymbol{A_{k+1}}| = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_k}| \cdot |\boldsymbol{A_{k+1}}|.$$

$$|\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_k} \times \boldsymbol{A_{k+1}}| = |(\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_k}) \times \boldsymbol{A_{k+1}}| = |\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_k}| \cdot |\boldsymbol{A_{k+1}}|$$

Dar $|\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_k}| = |\boldsymbol{A_1}| \cdot |\boldsymbol{A_2}| \cdot \dots \cdot |\boldsymbol{A_k}|$ și înlocuind în relația anterioară rezultă că $P(k+1)$ este adevărată.

Așadar, $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Exemplul 6:

Câte numere pare, de 5 cifre se pot forma, folosind doar cifre din mulțimea $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}\}$?

Avem de construit numere de forma $\overline{abcde}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre din mulțimea M, cu $a \neq 0$, aceasta fiind prima cifră a numărului, iar e cifră pară din mulțimea M, pentru respectarea condiției de paritate a numărului.

$a \in A = \{1,2,3,4,5\}$, $b \in M = \{0,1,2,3,4,5\}$, $c \in M = \{0,1,2,3,4,5\}$, $d \in M = \{0,1,2,3,4,5\}$, $e \in E = \{0,2,4\}$

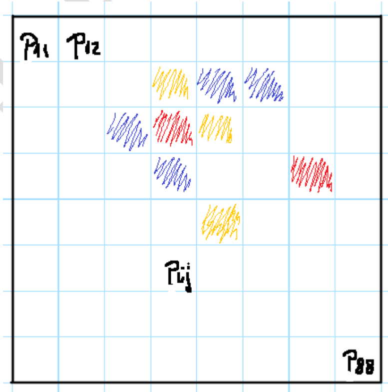
$$(a, b, c, d, e) \in A \times M \times M \times M \times E$$

Numărul de numere cu proprietatea din enunț este egal cu

$|A \times M \times M \times M \times E| = |A| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |E| = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 3240.$

Exemplul 7:

O tablă pătratică, având 8 pătrățele pe linie și 8 pe coloană, se colorează în 3 culori: roșu, galben și albastru, fiecare pătrățel fiind colorat într-o singură culoare. Câte modalități de colorare a tablei există?



În total sunt $8 \cdot 8 = 64$ de pătrățele.

Fiecărui pătrățel îi putem atribui oricare culoare din cele 3.

$$p_{ij} \in \{r, g, a\} \stackrel{\text{def}}{=} A, \forall i, j \in \{1,2, \dots, 8\}$$

Numărul posibilităților de colorare a tablei este egal cu cardinalul mulțimii $\underbrace{A \times A \times A \dots \times A}_{de\ 64\ ori\ A}$, adică

$\underbrace{|A| \cdot |A| \cdot \dots \cdot |A|}_{de\ 64\ ori\ |A|} = 3^{64}.$