

Videoclip: exemplu de propoziție în demonstrarea căreia inducția matematică nu se poate aplica: "Toți iepurii au aceeași culoare."

Ce învățăm din clip:

- să **redactăm** rezolvarea unei probleme, corelând limbajul uzual cu cel al logicii matematice și al teoriei mulțimilor;
- să **transpunem o situație-problemă în limbaj matematic**, să rezolvăm problema obținută și să interpretăm rezultatul;
- să **analizăm** enunțuri din punct de vedere al adevărului, al falsul

Încercăm să demonstrăm că:

Toți iepurii au aceeași culoare.

În realitate, aceasta este o problemă în care metoda inducției matematice nu se poate aplica. Transpunem acest enunț în forma unei propoziții matematice:

$P(n)$: Dacă o mulțime conține n iepuri, atunci toți iepurii din mulțime au aceeași culoare, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Prescurtăm "aceeași culoare" - **a. c.**

Începem metoda inducției matematice cu prima ei etapă, verificarea:

I) Vom verifica propoziția pentru $n = 1$, deci mulțimea conține un iepure: $\{i_1\}$. Cum iepurele are aceeași culoare cu sine, rezultă că $P(1)$ este adevărată.

$$i_1 \text{ a. c. } i_1$$

II) Pentru al doilea pas, pasul inductiv, vom considera $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, vom presupune $P(k)$ adevărată și vom demonstra că $P(k + 1)$ este adevărată.

$P(k)$: Dacă o mulțime conține k iepuri, atunci aceștia au aceeași culoare.

$$\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \rightarrow i_1, i_2, \dots, i_k \text{ a. c. (presupusă adevărată-ipoteza de inducție)}$$

$P(k + 1)$: Dacă o mulțime conține $k + 1$ iepuri, atunci aceștia au aceeași culoare.

$$\{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}\} \rightarrow j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1} \text{ a. c. (de demonstrat)}$$

Mare atenție că important este numărul de elemente ale mulțimii! În mulțimea cu $k + 1$ iepuri, trebuie să demonstrăm că toți au aceeași culoare.

Din mulțimea cu $k + 1$ iepuri, $\{j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}\}$, se pot extrage submulțimi care să conțină k iepuri.

Submulțimea $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ are k iepuri, deci, din ipoteza de inducție, j_1, j_2, \dots, j_k sunt iepuri de aceeași culoare (**a. c.**).

$$j_1, j_2, \dots, j_k \rightarrow \text{a. c.}$$

De asemenea, mulțimea $\{j_2, j_3, \dots, j_{k+1}\}$ conține k iepuri, deci și ei se aplică ipoteza de inducție, deci iepurii j_2, j_3, \dots, j_{k+1} vor avea aceeași culoare.

$$j_2, j_3, \dots, j_{k+1} \rightarrow a.c.$$

Remarcăm faptul că cele două mulțimi cu câte k elemente, conțin elemente comune. De la j_2 până la j_k , iepurii se găsesc și în prima mulțime și în a doua. Pe de altă parte, j_2, j_3, \dots, j_k au aceeași culoare, făcând parte din mulțimi de k elemente.

j_2, j_3, \dots, j_k a.c. $\Rightarrow j_1$ și j_{k+1} vor avea aceeași culoare cu j_2, j_3, \dots, j_k , deci

$$j_1, j_2, j_3, \dots, j_k, j_{k+1} \rightarrow a.c.$$

Rezultă, din acest raționament, că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar rezultă, oare, că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$?

Răspunsul este: NU!

În raționamentul nostru a apărut o eroare. Am presupus că acea mulțime de elemente comune, j_2, j_3, \dots, j_k , există, deci că există elemente care fac legătura între j_1 și j_{k+1} și care asigură acel caracter monocolor.

Să vedem, însă, ce se întâmplă când trecem de la o mulțime cu un element, la o mulțime cu două elemente.

Pentru un element, $\{i_1\}$, propoziția a fost adevărată. Dacă mulțimea are, însă, două elemente și încercăm să refacem acel pas, $P(k) \rightarrow P(k+1)$, ar trebui să separăm, din mulțimea cu două elemente, submulțimi cu un element. Acestea vor fi: $\{j_1\}$ și $\{j_2\}$. Doar că, între aceste două mulțimi, NU avem elemente de legătură, pentru că $\{j_1\} \cap \{j_2\} = \emptyset$.

Neexistând elemente de legătură, nu putem lega primul iepure de cel de-al doilea, deci nu putem stabili că aceștia doi au aceeași culoare.

Făcând legătura cu piesele de domino, în realitate, piesa numărul 1 nu atinge piesa numărul 2, ceea ce înseamnă că șirul nostru de piese nu cade (sigur) până la infinit...

Așadar, propoziția este falsă, ea nu se poate demonstra prin inducție matematică, pentru că în raționament am avut această eroare.