

## Principiul Inducției Matematice

### Breviar teoretic

Principiul inducției matematice constituie un mijloc important de demonstrație în matematică a propozițiilor (afirmațiilor) ce depind de argument natural.

Principiul inducției matematice constă în următoarele:

Un enunț oarecare  $P(n)$ , ce depinde de un număr natural  $n$ , este adevărată pentru orice  $n$  natural, dacă:

1.  $P(0)$  este o propoziție adevărată;
2.  $P(n)$  rămâne o propoziție adevărată, când  $n$  se majorează cu o unitate, adică  $P(n + 1)$  este adevărată.

Asadar, metoda inducției presupune două etape:

1. Etapa de verificare: se verifică dacă propoziția  $P(0)$  este adevărată;
2. Etapa de demonstrare: se presupune că propoziția  $P(n)$  este adevărată și se demonstrează justetea afirmației  $P(n + 1)$ .

Principiul inducției matematice este o axiomă a unui sistemului care poate fi utilizată pentru a dovedi o afirmație de forma  $\forall n P(n)$ , unde universul discursului este mulțimea numerelor naturale.

**Observație:** În unele cazuri principiul inducției matematice se utilizează în următoarea formă:

Fie  $m$  un număr natural,  $m \geq 1$  și  $P(n)$  o propoziție ce depinde de  $n$ , dacă

1.  $P(m)$  este adevărată;
2.  $P(n)$  fiind o propoziție adevărată implică  $P(n + 1)$  adevărată pentru  $n \geq m$ , atunci  $P(n)$  este o propoziție adevărată pentru orice număr natural  $n \geq m$ .

### Rețineți !

Demonstrația unei propoziții folosind inducția necesită doi pași. Mai întâi demonstrați pasul de bază.

Acest lucru este adesea ușor. De foarte multe ori pasul de bază este  $P(0)$ , dar uneori, când mulțimea are pe  $k$  cel mai mic element, etapa de bază este  $P(k)$ . Ai grijă pentru a începe de la numărul corect.

Apoi trebuie demonstrat pasul inductiv. Să presupunem că ipoteza de inducție  $P(n)$  este adevărată. **Nu încercați să demonstrați ipoteza inducției!** Acum va trebui să demonstrați că urmează  $P(n+1)$  din  $P(n)$ . Cu alte cuvinte, veți folosi  $P(n)$  ca fiind adevărată pentru a arăta că  $P(n+1)$  este adevărată.

Totuși, trebuie să fim **atenți la detalii** pentru că poate fi posibil să se demonstreze implicația  $P(n) \rightarrow P(n+1)$  chiar dacă predicatul  $P(n)$  este de fapt fals pentru fiecare număr natural  $n$ . De exemplu, să presupunem  $P(n) : n = n - 1$ , care este cu siguranță falsă pentru toate numerele  $n$ . Cu toate acestea, este posibil să arătați că, dacă presupui  $P(n)$ , atunci poți deduce corect  $P(n+1)$  prin următorul argument simplu:

Dacă  $n = n - 1$ , atunci, după adunarea lui 1 în ambii membri,  $n + 1 = (n - 1) + 1 = (n + 1) - 1$ . Astfel  $P(n) \rightarrow P(n+1)$ .

Greșeala provine din faptul că pasul de bază nu a fost verificat,  $P(1):1=0$ , fals.

Este ușor în acest moment să crezi că îți asumi ceea ce trebuie să demonstrezi. Trebuie să reținem, totuși, că atunci când demonstrați implicația  $P(n) \rightarrow P(n+1)$  în etapa de inducție, nu demonstrați  $P(n)$  direct, că exemplul de mai sus ne lămurește, deci acesta nu este un caz de raționament circular. Pentru a dovedi o implicație, tot ce trebuie să arăți este că, dacă premisa este adevărată, atunci concluzia este adevărată. Dacă premisa este de fapt adevărată în acest moment al unui argument de inducție este complet irelevant.

## Exemple

1. Să arătăm că  $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$  este adevărată.

Pasul inițial:  $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$  este adevărat.

Vom considera pentru un  $n$  oarecare  $P(n)$  adevărată și vom demonstra că

$P(n+1) : 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  este adevărată.

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ceea ce completează pasul inductiv.

2. Arătăm că  $P(n) : 2^n > n, \forall n \geq 1$  este adevărată.

Pasul inițial:  $P(1) : 2^1 > 1$  este adevărat.

Presupunem că  $P(n)$  este adevărată pentru un număr natural oarecare,  $n \geq 1$  și demonstrăm că  $P(n+1) : 2^{n+1} > n+1$  este adevărată.

Dacă înmulțim inegalitatea din  $P(n)$  cu 2, aceasta va deveni  $2 \cdot 2^n > 2 \cdot n$ . Cum

$2n \geq n+1, \forall n \geq 1$ , vom obține că  $2^{n+1} > n+1$  este adevărată pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

Conform principiului inducției matematice,  $P(n)$  este adevărată pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

## Variantă a Principiului inducției matematice

Fie  $k$  un număr natural nenul și  $P(n)$  un predicat cu mulțimea numerelor naturale mai mare decât  $k$ , fiind univers al discursului.

Dacă  $P(k)$  este adevărată și din faptul că  $P(j)$  este adevărată pentru  $k \leq j \leq n$  va rezulta că  $P(n+1)$  este adevărată, atunci  $P(n)$  este adevărată pentru orice  $n \geq k$ .

### Exemplu

Vom demonstra că orice număr întreg  $n \geq 2$  este număr prim sau se poate scrie ca produs de cel puțin două numere prime.

Vom considera  $P(n)$ : orice număr natural  $n \geq 2$  este număr prim sau se poate scrie ca produs de numere prime.

$P(2)$  este, evident, adevărată, 2 fiind număr prim.

Presupunem că pentru un număr natural oarecare  $n \geq 2$ ,  $P(j)$  este adevărată pentru orice  $2 \leq j \leq n$  și vom demonstra că  $P(n+1)$  este adevărată.

Dacă  $n+1$  este număr prim atunci  $P(n+1)$  este adevărată.

Dacă  $n+1$  nu este număr prim, atunci există  $a$  și  $b$  două numere naturale,  $2 \leq a \leq n$ ,  $2 \leq b \leq n$ , astfel încât  $n+1 = a \cdot b$ , unde  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$ , iar  $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$ , unde  $p_i, q_j, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$  sunt numere prime, atunci  $n+1 = p_1 \cdot \dots \cdot p_s \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_r$ , ceea ce înseamnă că  $P(n+1)$  este adevărată.

Conform variantei principiului inducției, demonstrația este încheiată.

### Exemplu

Să arătăm că  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2, \forall n \geq 1$  este adevărată.

Observăm că nu vom putea demonstra cu ajutorul inducției matematice. Vom putea demonstra însă un rezultat mai puternic cu ajutorul acestei metode.

Vom considera  $P(n) : \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

$P(1) : \frac{1}{1^2} \leq 1$  adevărat.

Presupunem că  $P(n)$  este adevărată pentru un număr real  $n$  oarecare și vom demonstra că

$P(n+1) : \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$  este adevărată.

Pentru a demonstra acest lucru vom aduna în ambii membri ai propoziției  $P(n)$  termenul

$\frac{1}{(n+1)^2}$ . Vom obține  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ , iar

$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(n+1)}$ ,  $\forall n \geq 1$  și deducem că  $P(n+1)$  este adevărată.

Matematrix  
Matematrix