

Videoclip: introducere în raționament pe baza principiului inducției matematice.

Ce învățăm din clip:

- să aplicăm metoda inducției matematice în demonstrarea unor propoziții matematice care sunt adevărate pentru o infinitate de numere naturale;
- să utilizăm proprietăți ale operațiilor algebrice în contexte variate;
- să validăm rezultate demonstrându-le prin raționament bazat pe principiul inducției matematice.

Considerăm o infinitate de piese de domino, așezate astfel încât fiecare piesă, în căderea ei, o va lovi pe următoarea. Prima, împinsă desigur, va atinge a doua piesă care va cădea în continuare peste a treia, care o va dărâma în continuare pe a patra, și așa mai departe, a n-a piesă va cădea și va lovi piesa a n+1-a, și așa mai departe. Asigurând continuitatea atingerii, în căderea lor, a acestor piese de domino, vom avea certitudinea că toate piesele de domino (infinitatea de piese de domino) vor fi dărâmate. Este un principiu riguros, corespunzător principiului inducției matematice.

Pentru demonstrarea unor propoziții matematice care depind de numere naturale, mai precis, sunt adevărate pentru o infinitate de numere naturale, vom folosi metoda inducției matematice.

Considerăm propoziția $P(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Încercăm să facem paralela între demonstrația noastră și șirul pieselor de domino. Trebuie să ne asigurăm că prima piesă de domino, din acest șir, nu este fixă, că ea poate cădea.

În prima etapă a metodei inducției matematice avem verificarea propoziției (I). Verificarea o facem totdeauna pentru primul număr natural de la care vrem să aibă loc proprietatea (egalitatea în cazul nostru), deci pentru $n = 1$.

$P(1): 1 = 1^2$, adică $1 = 1$, egalitate adevărată. Așadar, prima piesă de domino poate fi împinsă.

A doua etapă a metodei inducției matematice este pasul inductiv, sau inducția propriu-zisă (II). Pentru un număr natural nenul k fixat, vom presupune propoziția $P(k)$ adevărată și vom

demonstra că propoziția $P(k + 1)$ este adevărată. Acest lucru înseamnă, în jocul nostru de domino, atingerea piesei numărul k (în căderea ei) cu piesa numărul $k + 1$.

Scriem ce înseamnă $P(k)$ și $P(k + 1)$.

$P(k)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ (presupusă adevărată-ipoteză de inducție)

$P(k + 1)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (relația care trebuie demonstrată)

Vom porni cu membrul stâng al egalității din $P(k + 1)$ și vom folosi asociativitatea adunării numerelor naturale:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1) = \\ &= k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Paranteza dreaptă, am înlocuit-o cu k^2 , din ipoteza de inducție, apoi am restrâns binomul sumă la pătrat.

Acesta este rezultatul la care trebuia să ajungem. Am demonstrat că propoziția $P(k + 1)$ este adevărată, adică am asigurat atingerea piesei $P(k + 1)$ de piesa anterioară, $P(k)$.

Cei doi pași ai metodei inducției matematice, ne asigură, conform principiului inducției matematice, că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$.

Adică, toate piesele din șir sunt dărmate dacă prima piesă nu este fixă și dacă fiecare piesă o atinge pe următoarea. Să privim, din aproape în aproape, piesele de domino:

$P(1)$ a fost adevărată. Am împins-o și va cădea.

Din pasul al doilea al metodei inducției, dacă $P(1)$ este adevărată, atunci și $P(1 + 1)$ este adevărată. Deci $P(2)$ este adevărată, va cădea și această piesă.

$$P(1) \rightarrow P(2)$$

Aplicându-i lui $P(2)$ pasul inductiv, rezultă că și $P(2 + 1)$ este adevărată, deci $P(3)$ este adevărată.

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow \dots \rightarrow P(n) \rightarrow P(n + 1) \rightarrow \dots$$

Și așa mai departe...Piesele de domino cad, una câte una, fiecare împingând-o pe următoarea. Șirul infinit de piese de domino va avea toate piesele dărmate, adică va fi

dărâmat complet. Metoda inducției matematice pe care am folosit-o se numește, de altfel, și metoda inducției complete.

MATEMATRIX