Unitatea de învățare:	Elemente de logică matematică: metode de raționament

Breviar teoretic

Presupunem că vrem să demonstrăm propoziția p → q.

- **demonstrația prin contrapoziție** se bazează pe echivalența logică $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ și este o demonstrație directă a contrarei reciprocei propoziției respective;

Exemplu

Vom arăta că dacă a este un număr întreg și $a^2 - 2a + 7$ este număr par, atunci a este impar.

Vom considera p : $a^2 - 2a + 7$ este număr par, q: a este impar
Vom presupune contrariul, $\neg q$: a este par, adică $a = 2k, k \in \mathbb{Z}$. asta inseamnă $a^2 - 2a + 7 = 4k^2 - 4k + 7 = 4(k^2 - k) + 7$ este impar: $\neg p$, ceea ce inseamnă o contrazicere a ipotezei.

- **demonstrația prin reducere la absurd** se bazează pe echivalența $p \wedge \neg q \equiv \neg(p \rightarrow q)$. Ea urmărește să arate că din propoziția $p \wedge \neg q$ rezultă o contradicție (adică o propoziție de forma $r \wedge \neg r$), ceea ce se poate întâmplă numai dacă propoziția $\neg(p \rightarrow q)$ este falsă sau, echivalent, dacă propoziția $p \rightarrow q$ este adevărată.

Observație: A **nu** se confunda metoda de demonstrație prin reducere la absurd cu demonstrația prin contrapoziție.

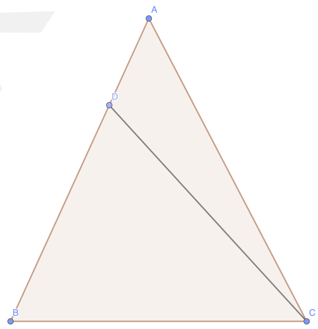
Exemplu

Șase elevi au mers la cules de ciuperci. La finalul zilei, ei reușiseră să găsească 13 ciuperci. Să se arate că există cel puțin doi dintre elevi care au găsit același număr de ciuperci.

În primă fază, trebuie să presupunem contrariul: fiecare elev a găsit un număr diferit de ciuperci.
Al doilea pas trebuie să conțină argumentarea, găsirea contradicției. Ținând cont de faptul că fiecare elev a găsit un număr diferit de ciuperci, vom putea spune că primul elev a cules un număr $n_1 \geq 0$, al doilea $n_2 \geq 1$, al treilea $n_3 \geq 2$ și așa mai departe până la $n_6 \geq 5$. Mergând mai departe, numărul total va fi $13 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, ceea ce ne conduce la o contradicție.

Exemplu

Dacă într-un triunghi ABC unghiurile B și C sunt congruente, atunci laturile opuse lor, AB, respectiv AC, sunt congruente.



Presupunând că laturile AB și AC nu sunt egale, am putea să presupunem că $AB > AC$. O să considerăm un punct D pe AB astfel încât DB=AC. Vom avea unghiurile ABC și BCA egale, BC latură comună, precum și DB=AC. Astfel triunghiurile DBC și ACB sunt congruente, ceea ce este absurd.