Unitatea de învățare	Elemente de logică matematică

Videoclip: interpretarea ipotezelor, stabilirea valorilor de adevăr ale unor posibile concluzii

Ce învățăm din clip:

- **să analizăm** enunțuri din punct de vedere al adevărului, al falsului sau al caracterului de incertitudine pe care-l reprezintă;
- **să transpunem în limbaj matematic** propoziții logice, folosind cuantificatori logici;
- **să stabilim valoarea de adevăr** a unei posibile concluzii.

Rezolvăm împreună două probleme de logică matematică.

Problema 1.

Acceptăm următoarele 3 afirmații ca fiind adevărate (ipoteze):

(I1) Familia Popescu are patru copii.

(I2) Doi dintre copiii familiei Popescu au ochii de culoare verde.

(I3) Jumătate dintre copii familiei Popescu sunt fete.

Urmează trei afirmații:

(A1) Cel puțin o fată are ochii de culoare verde.
(A2) Doi dintre copiii familiei Popescu sunt băieți.
(A3) Băieții familiei Popescu au ochii de culoare verde.

...și patru concluzii care se referă la valorile de adevăr ale afirmațiilor anterioare:

(C1) Doar A1 este adevărată
(C2) Doar A2 este adevărată.
(C3) Doar A2 și A3 sunt adevărate.
(C4) Niciuna dintre afirmațiile A1, A2 și A3 nu este adevărată.

Rezolvarea unei probleme începe, totdeauna, cu analizarea ipotezelor. Trebuie să extragem toate informațiile utile din aceste ipoteze.
Citind împreună ipotezele I1 și I3 deducem că, din cei patru copii ai familiei Popescu, jumătate sunt fete. Așadar, doi copii sunt fete și ceilalți doi sunt băieți.
Din ipoteza I2 deducem că doi dintre copiii familiei Popescu au ochii verzi. Însă, trebuie să deducem, eventual, care dintre copiii familiei Popescu au ochii verzi. Putem avea:

două fete cu ochii verzi	sau	doi băieți cu ochii verzi	sau	o fată și un băiat cu ochii verzi

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA
www.matematrix.ro

Niciuna dintre aceste posibilități nu este certă, din ipotezele noastre.
Citim prima afirmație: *(A1) Cel puțin o fată are ochii de culoare verde*.

Revenind la ipoteza I2, remarcăm că această afirmație nu este nici adevărată, nici falsă. Nu-i putem atribui valoare de adevăr pentru că putem avea doi băieți cu ochii verzi și atunci A1 devine falsă, sau putem avea două fete cu ochii verzi sau o fată și un băiat cu ochii verzi, cazuri în care A1 devine afirmație adevărată. Așadar, A1 este incertă, nu i se poate atribui valoare de adevăr.
A doua afirmație, *(A2) Doi dintre copiii familiei Popescu sunt băieți.*, este adevărată. Am dedus acest lucru aplicând ipotezele I1 și I3. Deci A2 este certă și adevărată.
Ultima afirmație este *(A3) Băieții familiei Popescu au ochii de culoare verde*. Nu-i putem atribui nici acestei afirmații valoare de adevăr, pentru că ar putea să existe două fete cu ochii verzi, sau o fată și un băiat cu ochii verzi, ceea ce ar conduce la A3 falsă, sau, putem avea doi băieți cu ochii verzi, ceea ce ar conduce la A3 adevărată. Așadar A3 este incertă.
Citind concluziile:
(C1) Doar A1 este adevărată. - este falsă pentru că A1 a fost incertă.

(C3) Doar A2 și A3 sunt adevărate. - este falsă pentru că A3 este incertă.

(C4) Niciuna dintre afirmațiile A1, A2 și A3 nu este adevărată.-este falsă pentru că A2 este adevărată.
Singura concluzie adevărată este: **(C2) Doar A2 este adevărată.**

A doua problemă de logică matematică are în enunțul ei o succesiune de propoziții imperative:

- Alege un număr întreg!
- Adună 1!
- Ridică noul număr la pătrat!
- Înmulțește rezultatul cu 4!
- Scade, apoi, 3!

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- A1: Rezultatul obținut este un număr impar, indiferent de numărul ales.
- A2: Rezultatul obținut este cu unu mai mare decât un multiplu de 3, oricare ar fi numărul ales.
- A3: Rezultatul nu este neapărat un număr prim.

Să alegem un număr întreg, k și să urmăm pașii indicați de enunțul nostru:
$$k \rightarrow k+1 \rightarrow (k+1)^2 \rightarrow 4\cdot(k+1)^2 \rightarrow 4\cdot(k+1)^2-3$$
Am obținut astfel rezultatul, pe care îl vom nota N, de forma:

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA
www.matematrix.ro

$$N = 4(k+1)^2 - 3.$$

Să vedem cum transcriem afirmațiile enunțate mai devreme, în limbaj matematic.

Prima afirmație, dat fiind că se încheie cu *”indiferent de numărul ales”*, se transcrie:

$$\forall k \in ', N = 2a + 1, a \in '$$

Încercăm să aducem numărul la forma dorită. Vom scrie:

$$N = 2 \cdot 2(k+1)^2 - 4 + 1 = 2[2(k+1)^2 - 2] + 1,$$

iar paranteza dreaptă, obținută din operații cu numere întregi, este, în final, un număr întreg. Așadar, numărul nostru este de forma $N = 2a + 1, a \in '$, indiferent de alegerea pe care o facem pentru k, ceea ce înseamnă că propoziția A1 este adevărată.

Pentru a doua afirmație, transcrierea în limbaj matematic este:

$$\forall k \in ', N = 3m + 1, m \in '.$$

Forma lui N arată, de fapt, că restul împărțirii lui N la 3 este 1. Pe de altă parte și numărul k este număr întreg, deci restul împărțirii lui k la 3 poate fi 0,1 sau 2, așadar categoriile de numere pe care le vom considera, și care acoperă toată mulțimea de numere întregi, vor fi:

$\boldsymbol{k = 3p, p \in '}$ ***multipli de 3***	$\boldsymbol{k = 3p + 1, p \in '}$ ***numere care dau, la împărțirea cu 3, restul 1***	$\boldsymbol{k = 3p + 2, p \in '}$ ***numere care dau, la împărțirea cu 3, restul 2***
Numărul N devine: $\boldsymbol{N = 4(3p+1)^2 - 3 =}$ $\boldsymbol{= 4(9p^2 + 6p + 1) - 3 =}$ $\boldsymbol{= 36p^2 + 24p^2 + 1 =}$ $\boldsymbol{= 3(12p^2 + 8p) + 1}$ Paranteza este un număr întreg, îl vom nota b, iar $N = 3b + 1, b \in '$, adică cu unu mai mult decât un multiplu de 3. Deci această variantă convine concluziei noastre. ✓ Dar trebuie analizate toate situațiile.→→→→→→→→→	Numărul N devine: $N = 4(3p+2)^2 - 3 =$ $= 4(9p^2 + 12p + 4) - 3 =$ $= 36p^2 + 48p^2 + 16 - 3 =$ $= 36p^2 + 48p^2 + 12 + 1 =$ $= 3(12p^2 + 16p + 4) + 1.$ Din nou, paranteza este un număr întreg, îl vom nota c, iar $N = 3c + 1, c \in '$, adică este cu unu mai mult decât un multiplu de 3. Și această situație convine concluziei noastre. ✓ Dar mai avem o situație de considerat. →→→→→→→→	Numărul N devine: $N = 4(3p+3)^2 - 3 =$ $= 4 \cdot 3^2(p+1)^2 - 3$ Observăm că din paranteză a ieșit factor comun 3, dar paranteza fiind la puterea a doua, factorul din fața parantezei va fi 3^2. Scoțând 3 factor comun, obținem: $N = 3[12(p+1)^2 - 1]$ Paranteza este un număr întreg, îl vom nota d, iar $N = 3d, d \in '$, deci este chiar un multiplu de 3 și nu *”cu unu mai mult decât un multiplu de 3”.* Această situație nu convine concluziei noastre. X Deci NU pentru orice k numărul nostru este cu unu mai mult decât un multiplu de 3, ceea ce conduce la concluzia: A2 este falsă.

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA
www.matematrix.ro

Afirmația A3 se rescrie astfel: $\exists k \in '$ pentru care numărul N nu este număr prim.
Este suficient să găsim o valoare întreagă a lui k pentru care N nu este număr prim, pentru ca această afirmație să fie adevărată.
Observăm că pentru $k = 0$, numărul N devine: $N = 4 \cdot 1^2 - 3 = 1$ care nu este număr prim.
Ne amintim că un număr prim este un număr natural, mai mare sau egal ca 2, care are divizori naturali doar pe 1 și pe el însuși.
Așadar, găsind o valoare întreagă a lui k pentru care N nu este număr prim, afirmația A3 devine adevărată.
Revenind la întrebările noastre, verificăm raționamentul pe care tocmai l-ați urmărit (se bifează căsuțele care afișează culoarea verde pentru adevăr și culoarea roșie pentru fals):

A1: Rezultatul obținut este un număr impar, indiferent de numărul ales.	adevărată
A2: Rezultatul obținut este cu unu mai mare decât un multiplu de 3, oricare ar fi numărul ales.	falsă
A3: Rezultatul nu este neapărat un număr prim.	adevărată

MATEMATRIX

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA
www.matematrix.ro