

Unitatea de învățare Elemente de logică matematică: **propoziții, predicate, cuantificatori logici; operații logice elementare, corelare cu operațiile și relațiile cu mulțimi; raționament prin reducere la absurd; inducția matematică; probleme de numărare**

Operații logice elementare. Corelare cu operațiile și relațiile cu mulțimi

În prima lecție de la unitatea de învățare Elemente de logică matematică am introdus noțiunile de **propoziție logică**, **valoare de adevăr** asociată unei propoziții logice – adevăr/fals, **predicat** și **propoziție universală**, respectiv **propoziție existențială**.

În cele ce urmează, vom defini, exemplifica și exersa **operațiile logice elementare, vom efectua calculul propozițional** și vom identifica **legătura dintre operațiile cu propoziții și operațiile cu mulțimi**. Simbolurile utilizate în calculul propozițional se mai numesc și **conectori logici**.

Ne situăm astfel în cadrul calculului propozițional, iar când ne referim la calcul ne vom axa la studiul propozițiilor rezultate din calcul doar din punct de vedere al valorii de adevăr, nu și al conținutului pe care-l reprezintă, ceea ce ne interesează în studiu fiind evidențierea relațiilor logice.

În continuare, vom utiliza termenul de *propoziție* în sensul în care l-am definit matematic, adică al oricărui enunț pentru care putem stabili valoarea de adevăr (sau valoarea logică) și vom considera că o propoziție este **determinată** dacă îi cunoaștem valoarea de adevăr.

Definiția 1:

Fie p propoziție. Prin negația propoziției p vom înțelege o nouă propoziție notată $\neg p$ sau \overline{p} , pentru care valoarea de adevăr se determină astfel:

- dacă p (1) – propoziție adevărată, atunci $\neg p$ (0) – propoziție falsă;
- dacă p (0) – propoziție falsă, atunci $\neg p$ (1) – propoziție adevărată.

Simbolurile \neg și $\overline{}$ reprezintă negația, scrierile $\neg p$ sau \overline{p} citindu-se non p .

Putem consemna regula anterioară în următor tabel, numit și tabel al valorilor de adevăr (sau tabelul valorilor logice):

p	$\neg p$
1	0
0	1

Exemple:

Cazul 1. p - propoziție adevărată

$p : 3 + 2 = 5$ (1), $v(p) = 1$	$\neg p : 3 + 2 \neq 5$ (0), $v(\neg p) = 0$
Rezultatul adunării numerelor 3 și 2 este egal cu 5.	Prin negație, expresiei este egal îi corespunde expresia nu este egal sau este diferit . Rezultatul adunării numerelor 3 și 2 nu este egal cu 5.
Important!	Propozițiile $q : 3 + 2 = 7$ sau $r : 3 + 2 < 5$, deși sunt false, nu reprezintă negații ale propoziției p .

Negația trebuie să cuprindă toate cazurile care nu corespund propoziției adevărate, în situația de față faptul că adunarea numerelor 3 și 2 **nu este egală** cu 5 conduce fie la $3+2 < 5$, fie la $3+2 > 5$.

Cazul 2. p - propoziție falsă

$p : 3+2 < 5$ (0), $v(p) = 0$	$\neg p : 3+2 \geq 5$ (1), $v(\neg p) = 1$
Rezultatul adunării numerelor 3 și 2 este mai mic decât 5.	Prin negație, expresiei mai mic îi corespunde expresia nu este mai mic sau este mai mare sau egal . Rezultatul adunării numerelor 3 și 2 nu este mai mic decât 5.
Important!	Propozițiile $q : 3+2 = 5$ (0) sau $r : 3+2 > 5$ (1) nu reprezintă negații ale propoziției p . Negația trebuie să cuprindă toate cazurile care nu corespund propoziției false, în situația de față faptul că adunarea numerelor 3 și 2 este mai mică decât 5 conduce fie la $3+2 = 5$, fie la $3+2 > 5$.

Observații și consecințe ale definiției:

1. Având o propoziție p , putem formula negația propoziției, $\neg p$, iar pentru aceasta putem formula negația propoziției $\neg p$ pe care o numim **dubla negație** sau **negația negației**, $\neg(\neg p)$ sau $\overline{\overline{p}}$. În tabelul următor se observă faptul că prin dubla negație a unei propoziții revenim la propoziția inițială, atât ca valoare de adevăr cât și la sensul conținutului propoziției inițiale.

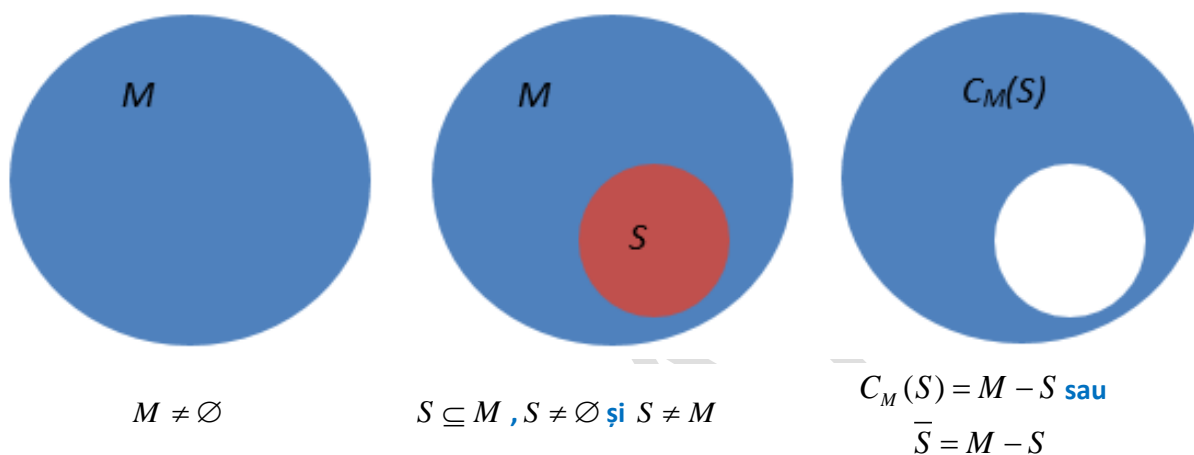
p	\overline{p}			
1	0			
0	1			
$\overline{\overline{p}}$	$\overline{\overline{\overline{p}}}$		p	\overline{p}
0	1		1	0
1	0		0	1

2. Legătura dintre negație și complementarea unei mulțimi.

Considerăm o mulțime nevidă M și o submulțime (parte) a acesteia, S , deci $S \subseteq M$ (incluziune nestrictă). În aceste condiții avem:

- notația $P(M)$ pentru mulțimea tuturor submulțimilor (părților) mulțimii M , deci $S \in P(M)$
- \emptyset și M sunt **submulțimi improprii** ale mulțimii M (adică orice mulțime nevidă are drept submulțimi mulțimea vidă și mulțimea însăși); cum $\emptyset \subseteq M$ și $M \subseteq M$, obținem că $P(M) \neq \emptyset$, iar în cazul în care $M \neq \emptyset$, atunci $\text{card}P(M) \geq 2$ (numărul de submulțimi este de cel puțin 2);

- S - **submulțime proprie** a mulțimii M dacă $S \subseteq M, S \neq \emptyset$ și $S \neq M$ sau $S \subset M$ (incluziune strictă) și $S \neq \emptyset$;
- mulțimea $M - S$ se numește complementara submulțimii S în raport cu mulțimea M , reprezintă o submulțime a mulțimii M , $M - S \subseteq M$, și se notează $C_M(S)$, sau prin \bar{S} , atunci când mulțimea M poate fi subînțeleasă.
- într-o reprezentare cu ajutorul diagramelor Venn, evidențiem relațiile dintre mulțimea M , submulțimea proprie S și complementarea acesteia $C_M(S)$:



Mulțime M nevidă	Submulțime S a mulțimii M	Complementara submulțimii S
Propoziții adevărate		
Există $x \in M$.	Există $x \in S$. Oricare $x \in S, x \in M$. Există $x \in M, x \notin S$.	Există $x \in \bar{S}$. Oricare $x \in \bar{S}, x \in M$. Există $x \in M, x \notin \bar{S}$.
Legătura dintre operații cu mulțimi și calculul propozițional	Proprietăți - mulțimi	Correspondența în calculul propozițional
	$S \cap \bar{S} = \emptyset$ - nu există elemente comune unei submulțimi și complementarei acesteia.	$\{v(p)\} \cap \{v(\bar{p})\} = \emptyset$ - o propoziție și negația sa nu pot avea aceeași valoare de adevăr
	$S \cup \bar{S} = M$ - orice element al mulțimii M este fie element al unei submulțimi a sa, fie element al complementarei acesteia.	$\{v(p)\} \cup \{v(\bar{p})\} = \{0,1\}$ - valorile de adevăr ale unei propoziții și ale negației sale formează întreaga mulțime de valori de adevăr.
	$\bar{\bar{S}} = S$ - complementara complementarei mulțimii S este tot mulțimea S	$\{v(\bar{\bar{p}})\} = \{v(p)\}$ Negația negației unei propoziții p este tot propoziția p .

3. Negația unui predicat.

Considerăm $p(x)$ este un predicat unar, de variabilă $x \in M$ care are proprietatea P , pentru care am notat cu $A(p)$ mulțimea sa de adevăr, unde – evident $A(p) \subseteq M$.

Negația predicatului $p(x)$, notată cu $\bar{p}(x)$, reprezintă predicatul de variabilă $x \in M$ care nu are proprietatea P , în acest caz având drept mulțime de adevăr $A(\bar{p}) = \overline{A(p)}$, adică $A(\bar{p}) = M - A(p)$.

Exemplu:

Fie predicatul $p(x) : \sqrt{x} = x, x \in [0, +\infty)$ și are mulțimea de adevăr $A(p) = \{0, 1\}$.

Negația sa este $\bar{p}(x) : \sqrt{x} \neq x, x \in [0, +\infty)$, caz în care are mulțimea de adevăr $A(\bar{p}) = [0, +\infty) - \{0, 1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

4. Negația unei propoziții universale. Negația unei propoziții existențiale.

Cazul 1. $(\forall x)p(x), (\forall x)q(x)$ - propoziții universale

$p(x) : [x+3] = [x] + 3, x \in \mathbb{R}$	$q(x) : [3x] = 3[x], x \in \mathbb{R}$
$(\forall x)p(x)$ (1) – propoziție universală adevărată (temă!) Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, x are proprietatea $[x+3] = [x] + 3$.	$(\forall x)q(x)$ (0) – propoziție universală falsă (temă!) Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, x are cu proprietatea $[3x] = 3[x]$.
Negația propoziției $(\forall x)p(x)$ Nu orice $x \in \mathbb{R}$ are proprietatea $[x+3] = [x] + 3$. Deci Există $x \in \mathbb{R}$ care nu are proprietatea $[x+3] = [x] + 3$. Există $x \in \mathbb{R}$ care are proprietatea $[x+3] \neq [x] + 3$.	Negația propoziției $(\forall x)q(x)$ Nu orice $x \in \mathbb{R}$ are proprietatea $[3x] = 3[x]$. Deci Există $x \in \mathbb{R}$, care nu are proprietatea $[3x] = 3[x]$. Există $x \in \mathbb{R}$ care are proprietatea $[3x] \neq 3[x]$.

Reținem:

Negația propoziției $(\forall x)p(x)$ este $(\exists x)\bar{p}(x)$.

Prin negația unei propoziții universale asociată predicatului $p(x)$ se obține o propoziție existențială asociată negației respectivului predicat.

Negația unei propoziții universale adevărate reprezintă propoziție existențială falsă.

Negația unei propoziții universale false reprezintă propoziție existențială adevărată.

Cazul 2. $(\exists x)p(x)$, $(\exists x)q(x)$ - **propoziții existențiale**

$p(x): x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$	$q(x): x \leq -2, x \in \mathbb{R}$
$(\exists x)p(x)$ (1) – propoziție existențială adevărată (temă!) Există $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x^2 - 3x + 2 = 0$.	$(\exists x)q(x)$ (0) – propoziție existențială falsă (temă!) Există $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $ x \leq -2$.
Negația propoziției $(\exists x)p(x)$ Nu există $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x^2 - 3x + 2 = 0$. Deci Oricare $x \in \mathbb{R}$, x nu are proprietatea $x^2 - 3x + 2 = 0$. Oricare $x \in \mathbb{R}$, x are proprietatea $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.	Negația propoziției $(\exists x)q(x)$ Nu există $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $ x \leq -2$. Deci Oricare $x \in \mathbb{R}$, x nu are proprietatea $ x \leq -2$. Oricare $x \in \mathbb{R}$, x are proprietatea $ x > -2$.

Reținem:

Negația propoziției $(\exists x)p(x)$ este $(\forall x)\overline{p(x)}$.

Prin negația unei propoziții existențiale asociate predicatului $p(x)$ **se obține o propoziție universală asociată negației respectivului predicat.**

Negația unei propoziții existențiale adevărate reprezintă propoziție universală falsă.

Negația unei propoziții existențiale false reprezintă propoziție universală adevărată.

$(\forall x)p(x)$	$(\exists x)\overline{p(x)}$	$(\exists x)p(x)$	$(\forall x)\overline{p(x)}$
1	0	1	0
0	1	0	1

5. Negația unor propoziții asociate predicatului binar $p(x, y)$.

Propoziția	Negația
$(\forall x)(\forall y)p(x, y)$	$(\exists x)(\exists y)\overline{p(x, y)}$
1	0
0	1

Propoziția	Negația
$(\exists x)(\exists y)p(x, y)$	$(\forall x)(\forall y)\overline{p(x, y)}$
1	0
0	1

Propoziția	Negația
$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$	$(\exists x)(\forall y)\overline{p(x, y)}$
1	0
0	1

Propoziția	Negația
$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$	$(\forall x)(\exists y)\overline{p(x, y)}$
1	0
0	1

Definiția 2:

Fie p, q propoziții. Prin conjuncția propozițiilor p și q vom înțelege o nouă propoziție notată $p \wedge q$, pentru care valoarea de adevăr se determină astfel:

- dacă p (1) și q (1) – propoziții adevărate, atunci $p \wedge q$ (1) – propoziție adevărată;
- în toate celelalte cazuri (ambele false/ una adevărată - una falsă, deci cel puțin una falsă) obținem $p \wedge q$ (0) – propoziție falsă.

Simbolul \wedge reprezintă conjuncția și reprezintă un operator (simbol asociat unei operații), iar scrierea $p \wedge q$ se citește p și q .

Putem consemna regula anterioară în următor tabel, numit și tabel al valorilor de adevăr (sau tabelul valorilor logice):

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple:

Cazul 1. p, q - propoziții adevărate

$$p: \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (1)}, q: \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

$$p \wedge q: \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

În enunțuri întâlnim uzual astfel de legături între propoziții, la fel folosim uzual în raționamente operarea de tip conjuncție. În cazul de față, ambele propoziții fiind adevărate, conjuncția lor este adevărată și, ținând cont de proprietatea de tranzitivitate a relației de egalitate, obținem o nouă propoziție adevărată, $r: \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

Cazul 2. p, q - propoziții false

$$p: 3 < 2 \text{ (0)}, q: 2 < 0 \text{ (0)}$$

$$p \wedge q: 3 < 2 \text{ și } 2 < 0 \text{ (0)}$$

În cazul de față, ambele propoziții sunt false, conjuncția lor reprezintă tot o propoziție falsă. Ținând cont de proprietatea de tranzitivitate a relației de inegalitate strictă, obținem o nouă propoziție falsă (ca o consecință a propozițiilor date, $r: 3 < 0$).

Cazul 3. p - propoziție falsă, q - propoziție adevărată

p : Restul împărțirii numărului 2022 la 4 este egal cu 0 . (0)

q : Anul bisect este reprezentat de orice număr natural divizibil cu 4 .(1)

$p \wedge q$ (0)

În cazul de față, cum prima propoziție este falsă și a doua adevărată, deci operăm cu cel puțin un fals, conjuncția lor este falsă și, ținând cont de proprietatea de tranzitivitate a relației de egalitate, obținem o nouă propoziție falsă, r : Numărul 2022 corespunde unui an bisect.

$q \wedge p$ (0)

Atunci când spunem că „Andrei și Bogdan sunt prieteni.” Avem același sens, deci același enunț, excepția ordinea numelor, cu a spune „Bogdan și Andrei sunt prieteni.” La fel, conjuncția reprezintă o propoziție falsă, indiferent care este ordinea propozițiilor.

Observații și consecințe ale definiției:

1. Având propozițiile p , q și r , identificăm în baza tablei conjuncției următoarele proprietăți:

$p \wedge p$ (1) dacă p (1)

$p \wedge p$ (0) dacă p (0)

Conjuncția unei propoziții cu ea însăși are ca rezultat propoziția însăși (atât ca valoare de adevăr, cât și ca semnificație a conținutului).

$p \wedge \bar{p}$ (0)

Conjuncția dintre o propoziție și negația sa are ca rezultat o propoziție falsă.

Justificare: cele două propoziții implicate au valori de adevăr diferite, deci cel puțin una dintre ele este falsă.

$p \wedge q$ și $q \wedge p$ au aceeași valoare de adevăr și păstrează aceeași semnificație din punct de vedere al conținutului

Ordinea propozițiilor în operația de conjuncție nu contează.

$(p \wedge q) \wedge r$ și $p \wedge (q \wedge r)$ au aceeași valoare de adevăr, în fiecare dintre cazurile în care se situează valorile de adevăr ale propozițiilor ce le formează

$p \wedge q \wedge r$ are aceleași valori de adevăr, indiferent de asocierea termenilor. Mai mult, în cazul unui calcul propozițional în care intervin doar conjuncții, adevăr se obține numai atunci când toate propozițiile implicate sunt adevărate.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Observație:

- în cazul unui calcul propozițional ce implică 2 propoziții, numărul de cazuri care se analizează este $4 = 2^2$.
- în cazul unui calcul propozițional ce implică 3 propoziții, numărul de cazuri care se analizează este $8 = 2^3$.

2. Prin conjuncția a două sau a mai multor propoziții se obțin **propoziții compuse** (în studiul limbii, similar cu frazele). În general, prin operarea cu două sau a mai multor propoziții se obțin propoziții compuse.

3. Utilizăm conjuncția și în cazul predicatelor. Exemplificăm pentru un sistem de ecuații:

$p(x, y)$	$q(x, y)$	$p(x, y) \wedge q(x, y)$
$x + y = 3, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	$xy = 2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	(S) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

În acest caz, mulțimea de adevăr a predicatului obținut prin conjuncție este $A(p \wedge q) = \{(1, 2); (2, 1)\}$, reprezentând mulțimea soluțiilor sistemului (S), adică toate perechile de numere reale care verifică prima ecuație a sistemului și a doua ecuație a sistemului.

Astfel, avem **proprietatea** $A(p \wedge q) = A(p) \cap A(q)$.

Ne putem explica astfel și **asemănarea simbolurilor** pentru operația conjuncție - \wedge - de la calculul propozițional și cel pentru operația intersecție - \cap - de la calculul cu mulțimi.

4. Legătura dintre operația **intersecție** și operația **conjuncție**.

Reamintim că pentru A și B mulțimi s-a definit operația intersecție, notată $A \cap B$, rezultatul operației fiind mulțimea care este formată numai din elementele comune mulțimilor A și B .

Utilizând scrierea propozițională, $A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ sau, simplificat – prin neglijarea parantezelor, $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$. Astfel, apar proprietăți similare ale intersecției cu cele de la conjuncție:

oricare A, B, C mulțimi, $A \cap A = A$; $A \cap B = B \cap A$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. În plus, ne reamintim că $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Definiția 3:

Fie p, q propoziții. Prin disjuncția propozițiilor p și q vom înțelege o nouă propoziție notată $p \vee q$, pentru care valoarea de adevăr se determină astfel:

- dacă p (0) și q (0) – propoziții false, atunci $p \vee q$ (0) – propoziție falsă;
- în toate celelalte cazuri (ambele adevărate/ una adevărată - una falsă, deci cel puțin una adevărată) obținem $p \vee q$ (1) – propoziție adevărată.
-

Simbolul \vee reprezintă disjuncția și reprezintă un operator (simbol asociat unei operații), iar scrierea $p \vee q$ se citește p sau q.

Putem consemna regula anterioară în tabelul valorilor de adevăr pentru disjuncție:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple:

Cazul 1. p, q - propoziții adevărate

$$p: \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (1)}, q: \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

$$p \vee q: \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ sau } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

În cazul de față, ambele propoziții fiind adevărate, disjuncția lor este adevărată. Propoziția compusă rezultată prin disjuncție sugerează că putem alege oricare dintre reprezentanții fracției ireductibile $\frac{1}{2}$ pentru a fi utilizată într-un raționament.

Cazul 2. p - propoziție adevărată, q - propoziție falsă

$$p: 3 = 3. \text{ (1)}$$

$$q: 3 < 3. \text{ (0)}$$

$$p \vee q \text{ (1)}$$

În cazul de față, cum prima propoziție este adevărată și a doua falsă, deci operăm cu cel puțin un adevăr, disjuncția lor este adevărată.

Integrând cele două conținuturi într-unul singur, obținem propoziția compusă adevărată:

$$p \vee q: 3 \leq 3.$$

$$q \vee p \text{ (1)}$$

La fel ca la conjuncție, și la disjuncție, ordinea propozițiilor în operație nu contează (nu schimbă nici valoarea de adevăr, nici sensul asociat propoziției compuse).

Reținem că în raport cu disjuncția, este suficient ca una dintre propoziții să fie adevărată pentru ca rezultatul disjuncției să reprezinte o propoziție adevărată.

Cazul 3. p, q - propoziții false

$$p: 3 < 2 \text{ (0)}, q: 3 = 2 \text{ (0)}$$

$$p \vee q: 3 < 2 \text{ sau } 3 = 2 \text{ (0)}$$

În cazul de față, ambele propoziții sunt false, disjuncția lor reprezintă tot o propoziție falsă.

$$p \vee q: 3 \leq 2 \text{ (0)}.$$

Observații și consecințe ale definiției:

1. Având propozițiile p , q și r , identificăm în baza tablei disjuncției următoarele proprietăți:

$p \vee p$ (1) dacă p (1)

$p \vee p$ (0) dacă p (0)

Disjuncția unei propoziții cu ea însăși are ca rezultat propoziția însăși (atât ca valoare de adevăr, cât și ca semnificație a conținutului).

$p \vee \bar{p}$ (1)	Disjuncția dintre o propoziție și negația sa are ca rezultat o propoziție adevărată. Justificare: cele două propoziții implicate au valori de adevăr diferite, deci cel puțin una dintre ele este adevărată.																																																															
$p \vee q$ și $q \vee p$ au aceeași valoare de adevăr și păstrează aceeași semnificație din punct de vedere al conținutului	Ordinea propozițiilor în operația de disjuncție nu contează.																																																															
$(p \vee q) \vee r$ și $p \vee (q \vee r)$ au aceeași valoare de adevăr, în fiecare dintre cazurile în care se situează valorile de adevăr ale propozițiilor ce le formează	<p>$p \vee q \vee r$ are aceleași valori de adevăr, indiferent de asocierea termenilor. Mai mult, în cazul unui calcul propozițional în care intervin doar disjuncții, fals se obține numai atunci când toate propozițiile implicate sunt false.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>p</th> <th>q</th> <th>r</th> <th>$p \vee q$</th> <th>$q \vee r$</th> <th>$(p \vee q) \vee r$</th> <th>$p \vee (q \vee r)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$																																																										
1	1	1	1	1	1	1																																																										
1	1	0	1	1	1	1																																																										
1	0	1	1	1	1	1																																																										
1	0	0	1	0	1	1																																																										
0	1	1	1	1	1	1																																																										
0	1	0	1	1	1	1																																																										
0	0	1	0	1	1	1																																																										
0	0	0	0	0	0	0																																																										

2. Utilizăm disjuncția și în cazul predicatelor. Exemplificăm pentru un raționament care implică abordarea pe cazuri:

$p(x, y)$	$q(x, y)$	$p(x, y) \vee q(x, y)$
$x + 3 = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	$y - 2 = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	$(x + 3)(y - 2) = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

În acest caz, mulțimea de adevăr a predicatului obținut prin disjuncție este $A(p \vee q) = A(p) \cup A(q)$, unde $A(p) = \{(-3, y), (\forall y) y \in \mathbb{R}\}$, respectiv $A(q) = \{(x, 2), (\forall x) x \in \mathbb{R}\}$, deci $A(p \vee q)$ reprezentând reuniunea mulțimilor soluțiilor cazului $x + 3 = 0$ și cazului $y - 2 = 0$.

Astfel, avem **proprietatea** $A(p \vee q) = A(p) \cup A(q)$.

Ne putem explica astfel și **asemănarea simbolurilor** pentru operația disjuncție - \vee - de la calculul propozițional și cel pentru operația reuniune - \cup - de la calculul cu mulțimi.

3. Legătura dintre operația reuniune și operația disjuncție.

Reamintim că pentru A și B mulțimi s-a definit operația reuniune, notată $A \cup B$, rezultatul operației fiind mulțimea care este formată atât din elementele mulțimii A cât și din elementele mulțimii B , luate o singură dată (nedublate).

Utilizând scrierea propozițională, $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ sau, simplificat – prin neglijarea parantezelor, $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$. Astfel, apar proprietăți similare ale reuniunii cu cele de la disjuncție: oricare A, B, C mulțimi, $A \cup A = A$; $A \cup B = B \cup A$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. În plus, ne reamintim că $A \cup \emptyset = A$.

Definiția 4:

Fie p, q propoziții. Prin implicația propozițiilor p și q vom înțelege o nouă propoziție notată $p \rightarrow q$, pentru care valoarea de adevăr se determină astfel:

- dacă p (1) propoziție adevărată și q (0) – propoziție falsă, atunci $p \rightarrow q$ (0) – propoziție falsă;
- în toate celelalte cazuri (ambele adevărate/ ambele false, prima falsă – a doua adevărată) avem $p \rightarrow q$ (1) – propoziție adevărată.

Simbolul \rightarrow reprezintă implicația și este un operator de relație (simbol asociat unei relații), iar scrierea $p \rightarrow q$ se citește p implică q sau dacă p , atunci q .

Pentru $p \rightarrow q$, dăm următoarea interpretare celor două propoziții:

- p se numește ipoteză (premisă care reprezintă datele cunoscute (date de intrare – la informatică input data) ale unei probleme; mai spunem că p este condiție necesară pentru q ;
- q se numește concluzie (ceea ce trebuie verificat/validat/demonstrat); mai spunem că propoziția q este condiție suficientă pentru p .

Putem consemna regula anterioară în tabelul valorilor de adevăr pentru implicație:

p	q	$p \rightarrow q$	
1	1	1	Adevărul implică adevăr.
1	0	0	Adevărul nu poate implica fals.
0	1	1	Un fals poate implica un adevăr (eroare de raționament).
0	0	1	Falsul implică fals.

Exemple:

Cazul 1. p, q - propoziții adevărate

p : $2019^2 + 2 \cdot 2019 + 1 = 2020^2$ (1), q : $2019^2 + 2 \cdot 2019 + 1$ este pătrat perfect (1)

$p \rightarrow q$:

$2019^2 + 2 \cdot 2019 + 1 = 2020^2$

implică $2019^2 + 2 \cdot 2019 + 1$
este pătrat perfect (1)

În cazul de față, ambele propoziții fiind adevărate, implicația lor este adevărată.

În acest caz înțelegem prin $p \rightarrow q$ și:

Dacă $2019^2 + 2 \cdot 2019 + 1 = 2020^2$, **atunci** $2019^2 + 2 \cdot 2019 + 1$
este pătrat perfect.

Cazul 2. p, q - propoziții false

p : Există un triunghi cu lungimile laturilor egale cu 1, 2 și 3. (0), q : Există un triunghi cu perimetrul egal cu 6 care are laturile de lungimi 1, 2 și 3. (0)

$p \rightarrow q$ (1)

În cazul de față, ambele propoziții fiind false, implicația lor este tot adevărată (*un fals implică un alt fals, ca o consecință logică a primului*).

În acest caz, prin $p \rightarrow q$ înțelegem:

Dacă există un triunghi cu lungimile laturilor egale cu 1, 2 și 3, atunci există un triunghi cu perimetrul egal cu 6 și cu laturile de lungimi 1, 2 și 3.

Cazul 3. p - propoziție falsă, q - propoziție adevărată

p : $3 = -3$. (0)

q : $3^2 = (-3)^2$. (1)

$p \rightarrow q$ (1)

În cazul de față, cum prima propoziție este falsă și a doua adevărată, implicația lor este adevărată (*un fals implică un adevăr, ca o consecință logică a primului*). Este cazul nefericit al obținerii unui rezultat valid printr-o eroare de raționament.

Integrând cele două conținuturi într-unul singur, obținem propoziția compusă adevărată $p \rightarrow q$:

Dacă $3 = -3$, **atunci** $3^2 = (-3)^2$.

Cazul 4. p - propoziție adevărată, q - propoziție falsă

p : $3 < 4$ (1), q : $-3 < -4$ (0)

$p \rightarrow q$ (0)

Cazul de față, în care prima propoziție este adevărată și a doua falsă, este singurul caz în care implicația reprezintă o propoziție falsă. Reținem că un adevăr nu poate implica un fals.

Integrând cele două conținuturi într-unul singur, obținem propoziția compusă falsă $p \rightarrow q$:

Dacă $3 < 4$, **atunci** $-3 < -4$.

Observații și consecințe ale definiției:

1. Având propozițiile p , q și r , identificăm în baza tablei implicației următoarele proprietăți:

$$p \rightarrow p \text{ (1)}$$

Implicația unei propoziții cu ea însăși are ca rezultat o propoziție adevărată, fie că adevărul implică adevăr, fie că falsul implică fals. Spunem că implicația este o relație reflexivă.

$p \rightarrow \bar{p}$ (1) dacă p (0) și $p \rightarrow \bar{p}$ (0) dacă p (1)	Exemple: $p \rightarrow \bar{p}$ (1): Dacă $3 \neq 3$, atunci $3 = 3$. $p \rightarrow \bar{p}$ (0): Dacă $3 = 3$, atunci $3 \neq 3$.
--	---

$p \rightarrow q$ și $q \rightarrow p$ reprezintă propoziții cu aceeași valoare de adevăr numai în cazul în care p și q au aceeași valoare de adevăr.

Ordinea propozițiilor în implicație contează.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ (1) propoziție adevărată, oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor p , q și r

Citim:

Dacă $p \rightarrow q$ și $q \rightarrow r$, atunci $p \rightarrow r$.

Relația implică este tranzitivă.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. Utilizăm implicația și în cazul predicatelor însă, în acest caz, simbolul \rightarrow este înlocuit de simbolul \Rightarrow (citit și **rezultă**). Exemplificăm:

$p(x, y)$	$q(x, y)$	$p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$
$x + y = 10, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$	$x \leq 10$ și $y \leq 10, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$	Dacă $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ și $x + y = 10$, atunci (rezultă) $x \leq 10$ și $y \leq 10$.

Astfel:

- dacă particularizăm $x = 3, y = 7$, atunci obținem $p(3,7)$ (1) și $q(3,7)$ (1), deci $p(3,7) \rightarrow q(3,7)$ (1) (adevărul implică adevăr);
- dacă particularizăm $x = 9, y = 5$, atunci obținem $p(9,5)$ (0) și $q(9,5)$ (1), deci $p(9,5) \rightarrow q(9,5)$ (1) (falsul implică adevăr);
- dacă particularizăm $x = 15, y = 7$, atunci obținem $p(15,7)$ (0) și $q(15,7)$ (0), deci $p(15,7) \rightarrow q(15,7)$ (1) (falsul implică fals);

Însă, în raport cu exemplul dat:

- nicio particularizare a variabilelor $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ pentru care din predicatul $p(x, y)$ se obține propoziție adevărată nu va conduce la o propoziție falsă obținută din predicatul $q(x, y)$.

Putem formula următoarea proprietate:

Dacă $A(p) \subseteq A(q)$ și $A(\bar{q}) \subseteq A(\bar{p})$, atunci $p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$ determină propoziții adevărate pentru oricare pereche de valori din domeniul pe care sunt definite predicatul.

Într-un astfel de caz spunem că predicatul $q(x, y)$ este o consecință logică a predicatului $p(x, y)$.

Mai spunem că $p(x, y)$ este o ipoteză sau condiție necesară, iar $q(x, y)$ este o concluzie sau condiție suficientă.

Reținem că enunțul multor probleme (dar nu al tuturor) este propoziție compusă de tip implicație.

Definiția 5:

Fie p, q propoziții. Prin echivalența propozițiilor p și q vom înțelege o nouă propoziție notată $p \leftrightarrow q$, pentru care valoarea de adevăr se determină astfel:

- dacă p și q au aceeași valoare de adevăr, atunci $p \leftrightarrow q$ (1) – propoziție adevărată;
- dacă p și q au valori de adevăr diferite, atunci $p \leftrightarrow q$ (0) – propoziție falsă;

Simbolul \leftrightarrow reprezintă echivalența și reprezintă un operator de relație (simbol asociat unei relații), iar scrierea $p \leftrightarrow q$ se citește p echivalent cu q sau p dacă și numai dacă q.

În acest caz spunem că propoziția p este condiție necesară și suficientă pentru propoziția q și reciproc.

Putem consemna regula anterioară în tabelul valorilor de adevăr pentru echivalență:

p	q	$p \leftrightarrow q$	
1	1	1	Orice două adevăruri sunt echivalente din punctul de vedere al logicii.
1	0	0	
0	1	0	Un adevăr nu poate fi echivalent cu un fals, așa cum un fals nu poate fi echivalent cu un adevăr.
0	0	1	Orice două falsuri sunt echivalente din punctul de vedere al logicii.

Exemple:

Cazul 1. p, q - propoziții adevărate

$$p: 2+0+2+2=6=2\cdot 3 \text{ (1)}, q: 3|2022 \text{ (1)}$$

$$p \leftrightarrow q:$$

$$2+0+2+2=6=2\cdot 3$$

$$\text{echivalent cu } 3|2022 \text{ (1)}$$

În cazul de față, ambele propoziții fiind adevărate, ele sunt echivalente din punct de vedere logic (echivalența este o propoziție adevărată).

În acest caz înțelegem prin $p \leftrightarrow q$ și:

$$2+0+2+2=6=2\cdot 3 \text{ dacă și numai dacă } 3|2022.$$

sau

Dacă suma cifrelor numărului 2022 este multiplu de 3, **atunci** numărul 2022 este multiplu de 3, **și reciproc, dacă** numărul 2022 este multiplu de 3, **atunci** suma cifrelor numărului 2022 este multiplu de 3.

Cazul 2. p, q - propoziții false

p : Suma lungimilor laturilor bazelor unui trapez, exprimate prin numere naturale consecutive, este pară. (0), q : Linia mijlocie a trapezului cu bazale de lungimi numere naturale consecutive are o lungime exprimată printr-un număr natural. (0)

$$p \leftrightarrow q \text{ (1)}$$

În cazul de față, ambele propoziții fiind false, echivalența lor este tot adevărată (*un fals echivalează logic cu orice alt fals*).

În acest caz, prin $p \leftrightarrow q$ înțelegem:

Într-un trapez cu lungimile bazelor exprimate prin numere naturale consecutive, suma lungimilor bazelor are ca rezultat un număr par **dacă și numai dacă** linia mijlocie a trapezului este exprimată printr-un număr natural.

Cazul 3. p - propoziție falsă, q - propoziție adevărată

$$p: 3 = -3. \text{ (0)}$$

$$q: 3^2 = (-3)^2. \text{ (1)}$$

$$p \leftrightarrow q \text{ (0)}$$

În cazul de față, cum prima propoziție este falsă și a doua adevărată, echivalența lor este falsă (*niciun adevăr nu este echivalent logic cu niciun fals*).

Integrând cele două conținuturi într-unul singur, obținem propoziția compusă falsă $p \leftrightarrow q$:

$$3 = -3 \text{ dacă și numai dacă } 3^2 = (-3)^2.$$

$$q \leftrightarrow p \text{ (0)}$$

Și în acest caz (prima propoziție este adevărată, a doua falsă), echivalența este falsă.

Observații și consecințe ale definiției:

1. Având propozițiile p , q și r , identificăm în baza tablei echivalenței următoarele proprietăți:

$$p \leftrightarrow p \text{ (1)}$$

Orice propoziție este echivalentă cu ea însăși.

Spunem că echivalența logică este o relație reflexivă.

$$p \leftrightarrow \bar{p} \text{ (0)}$$

O propoziție și negația sa nu sunt echivalente logic.

$p \leftrightarrow q$ și $q \leftrightarrow p$ reprezintă propoziții echivalente logic, deci $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ (1)

Ordinea propozițiilor în echivalență nu contează.

Spunem că relația de echivalență logică este simetrică.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r) \text{ (1)}$$

Citim:

Dacă $p \leftrightarrow q$ și $q \leftrightarrow r$, atunci $p \leftrightarrow r$.

Relația de echivalență logică este tranzitivă.

propoziție adevărată, oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor p , q și r

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$	$p \leftrightarrow r$	$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \text{ (1)}$$

Citim:

$p \rightarrow q$ și $q \rightarrow p$ dacă și numai dacă $p \leftrightarrow q$.

Relația implicație este antisimetrică.

propoziție adevărată, oricare ar fi valorile de adevăr ale propozițiilor p și q .
Relația de echivalență este o relație de dublă implicare.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

2. Utilizăm explicația și în cazul predicatelor însă, în acest caz, simbolul \leftrightarrow este înlocuit de simbolul \Leftrightarrow . Exemplificăm:

$p(x, y)$	$q(x, y)$	$p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y)$
$x - y = 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	$y = x - 1, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$	$x - y = 1$ dacă și numai dacă $y = x - 1$, unde $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Astfel:

- dacă particularizăm $x = 3, y = 2$, atunci obținem $p(3, 2)$ (1) și $q(3, 2)$ (1), deci $p(3, 2) \Leftrightarrow q(3, 2)$ (1) (adevărul echivalent cu adevăr)
- dacă particularizăm $x = 3, y = 3$, atunci obținem $p(3, 3)$ (0) și $q(3, 3)$ (0), deci $p(3, 3) \Leftrightarrow q(3, 3)$ (1) (falsul echivalent cu fals);

Însă, în raport cu exemplul dat:

- nicio particularizare a variabilelor $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ nu determină propoziție cu valoare de adevăr obținută din predicatul $p(x, y)$ diferită de valoarea de adevăr a propoziției obținută din predicatul $q(x, y)$.

Putem formula următoarea proprietate:

Dacă $A(p) = A(q)$, atunci $p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y)$ determină propoziții adevărate pentru oricare pereche de valori din domeniul pe care sunt definite predicatul. Putem spune astfel că relația de egalitate pe mulțimi este o relație de dublă incluziune ($A(p) \subseteq A(q)$ și $A(p) \supseteq A(q)$).

Într-un astfel de caz spunem că predicatul $q(x, y)$ este o consecință logică a predicatului $p(x, y)$ așa cum și $p(x, y)$ este consecință logică a lui $q(x, y)$.

Reținem că enunțul multor probleme (dar nu al tuturor) este propoziție compusă de tip echivalență.

3. În baza definițiilor anterioare, cu ajutorul propozițiilor și a conectorilor logici \neg, \vee, \wedge obținem propoziții compuse, numite și formule, notate cu litere din alfabetul grecesc - α, β, \dots .

Spre exemplificare, $p \vee q$ este o propoziție compusă pe care putem s-o notăm $\alpha(p, q)$, evidențiind astfel care sunt propozițiile simple ce intervin.

Propoziția compusă care este adevărată pentru orice valori ale propozițiilor simple ce o compun se numește tautologie.

Două sau mai multe propoziții compuse care depind de aceleași propoziții simple și care dau aceeași valoare de adevăr în toate cazurile generate de valorile de adevăr ale propozițiilor simple de care depind se numesc echivalente.

Astfel, considerând p și q propoziții simple și $\alpha(p, q)$ și $\beta(p, q)$ două propoziții compuse ce depind de p și q , vom înțelege că $\alpha(p, q)$ și $\beta(p, q)$ sunt echivalente și vom scrie $\alpha \equiv \beta$ dacă:

- oricare ar fi valorile de adevăr ale p și q pentru care $\alpha(p, q)$ este adevărată, atunci $\beta(p, q)$ este tot propoziție adevărată;
- și
- oricare ar fi valorile de adevăr ale p și q pentru care $\alpha(p, q)$ este falsă, atunci $\beta(p, q)$ este tot propoziție falsă.

Evidențiem în cele ce urmează o serie de echivalențe și tautologii:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ (1)
tautologie

$(p \rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$
Formulele $p \rightarrow q$ și $\bar{p} \vee q$ sunt echivalente.

Implicația este echivalentă cu disjuncția dintre negația primei propoziții și cea de-a doua propoziție.

p	q	$p \rightarrow q$	\bar{p}	$\bar{p} \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Observație:
remarcă
m prin
această
echivale

ntă că formula compusă $p \rightarrow q$ are la bază propozițiile p și q , precum și conectorii logici negație și disjuncție. În acest sens, în lista conectorilor logici prin care se formează propoziții compuse am inclus doar conectorii de tip negație, disjuncție și conjuncție.

$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow$
 $\leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

(1)

tautologie

$[p \wedge (q \vee r)] \equiv$
 $\equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

Formulele $p \wedge (q \vee r)$ și $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ sunt echivalente.

Conjuncția este **distributivă** față de disjuncție.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

În raport cu operațiile pe mulțimi, avem similar **distributivitatea intersecției față de reuniune**, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, oricare A, B, C mulțimi.

$$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

(1)

tautologie

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv$$

$$\equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

formulele $p \vee (q \wedge r)$ și $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ sunt echivalente.

Disjuncția este **distributivă** față de conjuncție.

Temă!

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	...				
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

În raport cu operațiile pe mulțimi, avem similar **distributivitatea reuniunii față de intersecție**, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, oricare A, B, C mulțimi.

$$p \rightarrow q \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \quad (1)$$

tautologie

$$(p \rightarrow q) \equiv (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

Formulele $p \rightarrow q$ și $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ sunt echivalente.

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$	$p \rightarrow q \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Propoziția p implică propoziția q este echivalent cu faptul că negația propoziției q implică negația propoziției p .

$$\overline{p \vee q} \leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad (1)$$

tautologie

$$\overline{p \vee q} \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

Formulele $\overline{p \vee q}$ și $\bar{p} \wedge \bar{q}$ sunt echivalente.

Negația disjuncției a două propoziții este echivalentă cu conjuncția negațiilor celor două propoziții.

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Negația conjuncției a două propoziții este echivalentă cu disjuncția negațiilor celor două propoziții.

Temă- construirea tabelului de adevăr al propoziției $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$!

În raport cu operațiile pe mulțimi, avem similar **relațiile lui De Morgan** pentru cazul în care avem o mulțime M și submulțimile A și B ale acesteia:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \quad (1)$$

tautologie

Dubla implicație reprezintă echivalența.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv$ $\equiv (p \leftrightarrow q)$ <p>Formulele $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ și $p \leftrightarrow q$ sunt echivalente.</p>	<p>În raport cu mulțimile, un rezultat similar este cel în care dubla incluziune reprezintă egalitatea a două mulțimi: $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ este echivalent cu $A = B$, oricare A, B mulțimi.</p>
$\overline{(\forall x)p(x)} \leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$ <p>(1) tautologie</p> $\overline{(\exists x)p(x)} \leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$ <p>(1) tautologie</p>	<p>Negația unei propoziții universale asociate unui predicat este echivalentă cu propoziția existențială a negației predicatului (vezi prezentarea de la negații).</p> <p>Negația unei propoziții existențiale asociate unui predicat este echivalentă cu propoziția universală a negației predicatului (vezi prezentarea de la negații).</p>
$(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$ <p>(1) tautologie</p>	<p>Dacă pentru oricare x propozițiile obținute din predicatul $p(x)$ sunt adevărate, atunci există cel puțin o valoare atribuită variabilei x pentru care se obține propoziție adevărată din predicatul $p(x)$.</p>