Unitatea de învățare	Elemente de logică matematică: propoziții, predicate, cuantificatori logici; operații logice elementare, corelare cu operațiile și relațiile cu mulțimi; raționament prin reducere la absurd; inducția matematică; probleme de numărare

Propoziții, predicate. Cuantificatori logici

Logica matematică este un domeniu al matematicii, similar cu domeniul *gramatică* în cadrul studiului unei limbi. În acest sens, vom avea termeni comuni celor două domenii – logică matematică și gramatică - precum propoziție, predicat, însă sensul dat va fi diferit. Cum la baza oricărui text matematic stau **propozițiile**, în prezentarea de față ne vom referi la acestea, le vom caracteriza, apoi vom învăța să analizăm **construcții mai complexe**, formate din mai multe propoziții.
Dicționarul de expresii va cuprinde și noțiunile de **Adevăr** și **Fals**, atribute principale prin care vom analiza propozițiile.

Definiția 1: În sens matematic, numim propoziție orice enunț pentru care poate fi adevărat sau poate fi fals, dar *nu poate fi în același timp* și adevărat și fals.

Exemple:

ENUNȚURI DE TIP PROPOZIȚII ÎN SENSUL LOGICII MATEMATICE		ENUNȚURI CARE NU SUNT PROPOZIȚII ÎN SENSUL LOGICII MATEMATICE
ADEVĂRATE	**FALSE**	
$3+5=8$	$3+5\neq 8$ $3+5=9$	$3+5$
$1<2$		
π este un număr irațional.	π nu este un număr irațional.	Afară plouă.
Centrul cercului reprezintă un punct care nu aparține acestuia.	Centrul cercului reprezintă un punct care aparține acestuia.	
Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte	Există o dreaptă care este formată dintr-un singur punct. Există o dreaptă care este formată din cel mult un punct.	Poartă mască!
Există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lvert x\rvert\leq 0$.	Oricare $x\in\mathbb{R}$, $\lvert x\rvert>0$.	
Evitarea contactului apropiat cu alte persoane diminuează riscul îmbolnăvirii cu virusul SARS-CoV_2.	Doar persoanele vârstnice sunt expuse riscului de îmbolnăvire cu virusul Sars-CoV-2.	

Notații, observații și consecințe ale definiției:

1. Atributele propoziției în sensul logicii matematice se notează astfel:

Propoziție adevărată	Propoziție falsă
A	F
sau	
1	0

2. Prin cele două atribute – adevărat/fals - caracterizăm o propoziție din punctul de vedere al **valorii sale de adevăr**. Astfel, valoarea de adevăr este o proprietate a propozițiilor în sensul logicii matematice. Atributul *adevărat* poate fi asociat oricărei afirmații care corespunde unei realități.

3. De regulă, **notația unei propoziții** în sensul logicii matematice se face cu literele mici ale alfabetului latin: **p, q, r,** ... Exemple:

Notația **p**: $3+5=8$ (A) sau **p**: $3+5=8$ (1)
Propoziția p este adevărată.
Notația $v(p)=1$
Valoarea de adevăr a propoziției p este adevărul.

Notația **q**: $3+5=9$ (F) sau **q**: $3+5=8$ (0)
Propoziția q este falsă.
Notația $v(p)=0$
Valoarea de adevăr a propoziției q este falsul.

Putem asocia ca notație a propozițiilor, de exemplu când sunt în număr mare, și o notație combinată de tip literă și indice: $p_1, p_2, p_3, ...$

4. Faptul că unei propoziții putem să-i atribuim numai una dintre cele două valori de adevăr, ne permite formularea a două principii ale logicii propozițiilor:

- principiul terțului exclus: orice propoziție este adevărată sau falsă;
- principiul non-contradicției: nicio propoziție nu poate fi în același timp și adevărată și falsă.

Adăugăm celor două principii și:

- principiul identității: o propoziție își păstrează valoarea sa de adevăr (*am putea spune că valoarea de adevăr se păstrează, indiferent de contextul și momentul în care este utilizată*)

5. Un enunț care are o valoare de adevăr este propoziție în sensul logici matematice, indiferent dacă enunțul este din domeniul matematic sau nu.

6. În matematică există enunțuri care sunt propoziții, în sensul în care au o valoare de adevăr și pentru care:

- există un raționament prin care se determină valoarea de adevăr; astfel de enunțuri le regăsiți în teorie și în aplicații sub formă de probleme;
- se poate atribui adevărul, fără justificare; astfel de enunțuri se numesc **axiome**; propoziții de tip axiome au fost întâlnite pe parcursul studiului matematicii; astfel, la baza elementelor de geometrie se află o serie de axiome, care generează întreaga structură logică, necontradictorie, a geometriei; matematicianul Euclid a enunțat cunoscuta **axiomă a paralelelor**:

„Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură paralelă la dreapta dată.”

- nu s-a formulat (până în prezent) un raționament care să asocieze atributul de adevărat sau fals; astfel de enunțuri se numesc **conjecturi** și au sensul de presupunere ce nu a putut fi nici validată, nici infirmată; un exemplu celebru este conjectura lui Goldbach: „Orice întreg mai mare decât 5 poate fi scris ca sumă de 3 numere prime.”; cu trecerea timpului, unele conjecturi au fost rezolvate, celebră fiind conjectura numită Marea teoremă a lui Fermat: „Ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții dacă $n > 2$ este număr natural, iar x, y *și* z sunt numere întregi nenule.”; de la momentul formulării acestei conjecturi de către Fermat (1637) au trecut aproape patru secole până la rezolvarea completă a ecuației propuse, de către matematicianul Andrew Wiles (1994), moment de la care conjectura a fost încadrată la categoria propoziții adevărate.

Definiția 2: În sens matematic, numim predicat orice enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care, pentru orice valori ale variabilelor, reprezintă propoziții adevărate sau false. Mulțimea de valori care se pot atribui variabilelor predicatului formează universul predicatului. Mulțimea valorilor atribuite variabilelor pentru care se obțin propoziții adevărate se numește mulțimea de adevăr a predicatului.

Universul predicatului și mulțimea de adevăr

Notații, exemple, comentarii

<table>
<tr><th colspan="2">ENUNȚURI DE TIP PREDICAT ÎN SENSUL LOGICII MATEMATICE</th><th>ENUNȚURI CARE NU SUNT PREDICATE ÎN SENSUL LOGICII MATEMATICE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplul 1. p(x): $3x-5=7$, $x \in \mathbb{R}$</td><td rowspan="4">$3x+5$, $x \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Pentru $x=4$, se obține
p(1): $3\cdot 4-5=7$ (A)
$v(p(4))=1$</td><td>Pentru $x=0$, se obține
p(0): $3\cdot 0-5=7$ (F)
$v(p(0))=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A(p)=\{4\}$</td></tr>
<tr><td>Notații utilizate:</td><td>- p(x) – predicatul p ce depinde de o variabilă, x; predicat unar;
- x – variabilă (notației i se poate atribui cel puțin o valoare)
- 0, 4 – exemple de valori atribuite variabilei x, unde am ținut cont de domeniul (mulțimea) de valori precizat în enunț (mulțimea numerelor reale în cazul de față)
- p(4) – propoziția obținută din predicatul p(x) prin particularizarea variabilei x, pentru cazul $x=4$
- $A(p)$ - mulțimea de adevăr a predicatului p(x), adică mulțimea tuturor valorilor care, atribuite variabilei x, determină propoziții adevărate</td></tr>
</table>

Exemplul 2. q(a,b **)**: $a^2+b^2=1$, $a,b\in\mathbb{Z}$, predicat binar	
$A(q)=\{(1,0);(-1,0);(0,1);(0,-1)\}$	
Exemplul 3. r(x_1,x_2,x_3 **)**: $x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$, $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$, predicat ternar	
$A(r)=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	
Exemplul 4. t(x **)**: $x^2+1=0$, $x\in\mathbb{R}$	
$A(q)=\varnothing$	

Observații și consecințe ale definiției:

1. După numărul de variabile pe care le conține, predicatul poate fi unar – depinde o variabilă, binar – depinde de două variabile, ternar – depinde de trei variabile.
2. Prin particularizarea unei variabile înțelegem atribuirea unei valori variabilei respective. Astfel, prin particularizarea tuturor variabilelor predicatului se obțin propoziții. Fiecare propoziție are asociată valoarea sa de adevăr. Toate valorile atribuite variabilelor pentru care se obțin propoziții adevărate formează mulțimea de adevăr a predicatului.
3. În funcție de mulțimea de adevăr a predicatului, avem următoarele caracterizări (exemplificare pentru predicat unar, valabilă și pentru celelalte tipuri de predicate):

$p(x)$

Mulțimea M de valori ale variabilei x (universul predicatului)	**Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$**	**Interpretare**
$M\neq\varnothing$	$A(p)=\varnothing$	Nicio propoziție obținută din predicatul $p(x)$ nu este adevărată. Cazul poate corespunde unei ecuații care nu admite soluții (pe mulțimea de valori ale variabilei) – ecuație incompatibilă. Exemplu: $p(x): 3x=5, x\in\mathbb{Z}$
	Cardinalul $A(p)$ este egal cu 1	O singură (unică) propoziție obținută din predicatul $p(x)$ este adevărată. Cazul poate corespunde unei ecuații care admite soluție unică (pe mulțimea de valori ale variabilei) – ecuație compatibilă determinată. Exemplu: $p(x): 3x=5, x\in\mathbb{Q}$
	Cardinalul $A(p)$ este mai mare decât 1, dar diferit de M.	Evident, în condițiile date, $A(p)\subset M$ (incluziune strictă). Cel puțin două propoziții obținute din predicatul $p(x)$ sunt adevărate și cel puțin una dintre propoziții nu este adevărată.

		Cazul poate corespunde unei ecuații care admite soluții (pe mulțimea de valori ale variabilei, dar care nu epuizează toate valorile din universul predicatului) – ecuație compatibilă. Exemplu: $p(x): x^2 = 5, x \in \mathbb{R}$
	$A(p) = M$	Toate propozițiile obținută din predicatul $p(x)$ sunt adevărate. Cazul poate corespunde unei identități. Exemplu: $p(x): \|x\| = \|-x\|, x \in \mathbb{R}$

Definiția 3: Un enunț de forma „oricare $x \in M$, are loc $p(x)$" se numește propoziție universală asociată predicatului $p(x)$. Notația unei astfel de propoziții universale este $(\forall x)p(x)$, $x \in M$, unde simbolul $\forall$ - citit oricare/oricare ar fi – se numește cuantificator universal. Valoarea de adevăr a propoziției universale $(\forall x)p(x)$, $x \in M$ se stabilește astfel:

$(\forall x)p(x)$, $x \in M$

$(\forall x)p(x)$, $x \in M$ **adevărată (1)**	**Propozițiile obținute prin particularizarea variabilei x cu orice valoare din mulțimea M sunt adevărate.** Exemplu: $p(x): x^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$ implică faptul că propoziția universală $(\forall x)p(x), x \in \mathbb{R}$ este adevărată (pătratul oricărui număr reale este mai mare sau egal cu 0)
$(\forall x)p(x)$, $x \in M$ **falsă (0)**	**Nu toate propozițiile obținute prin particularizarea variabilei x cu valori din mulțimea M sunt adevărate, deci există cel puțin o valoare din M pentru care se obține propoziție falsă.** Exemplu: $p(x): x^2 > 0, x \in \mathbb{R}$ implică faptul că propoziția universală $(\forall x)p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ este falsă (pentru $x = 0 \in \mathbb{R}$, $p(0): 0^2 > 0$ este o propoziție falsă).

Observații și consecințe ale definiției:

1. În cazul predicatului $p(x)$ cu mulțimea de valori ale variabilei notată M, avem:

$p(x)$, $x \in M$

$(\forall x)p(x)$ **(1)**	$A(p) = M$
$(\forall x)p(x)$ **(0)**	$A(p) \subset M$ (incluziune strictă)

2. În matematică întâlnim propoziții universale asociate și unor predicate de mai multe variabile. Exemplificăm pentru cazul unor predicate binare:

$p(x,y)$, $q(x,y)$ - **predicate binare**

$p(x,y):(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2, x,y \in \mathbb{R}$	$(\forall x)(\forall y)p(x,y)$ (1)	În acest caz exemplul reprezintă o identitate algebrică.
$q(x,y):\lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert+\lvert y\rvert, x,y \in \mathbb{R}$	$(\forall x)(\forall y)q(x,y)$ (0)	În acest caz se obțin propoziții adevărate numai în cazul în care variabilele x și y au același semn (fie ambele mai mari sau egale cu 0, fie ambele mai mici sau egale cu 0).
Important!	$(\forall x)(\forall y)p(x,y)$ $(\forall y)(\forall x)p(x,y)$	Cele două propoziții sunt echivalente din punctul de vedere al valorii de adevăr, fie sunt ambele adevărate, fie ambele false.

3. Stabilirea valorii de adevăr a unei propoziții universale presupune:

În cazul în care se cere atribuirea valorii de adevăr (1) – propoziție universală adevărată	De regulă, se procedează la rezolvare prin construcția unui raționament care validează adevărul pentru oricare dintre propozițiile asociate predicatului. Astfel, pentru $p(x,y):(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2, x,y \in \mathbb{R}$, raționamentul utilizat se bazează pe prelucrarea membrilor relației de egalitate până la obținerea unei egalități evidente: $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+xy+yx+y^2 = x^2+2xy+y^2$ adevărat, oricare $x,y \in \mathbb{R}$.
	În cazul unui predicat definit pe o mulțime de cardinal finit, mic, se poate proceda și la verificarea directă a fiecărei propoziții prin înlocuirea variabilei cu fiecare element al universului predicatului.
În cazul în care se cere atribuirea valorii de adevăr (0) – propoziție universală falsă	Metoda specifică pentru justificare în acest caz este contraexemplul. Astfel, pentru $q(x,y):\lvert x+y\rvert = \lvert x\rvert+\lvert y\rvert, x,y \in \mathbb{R}$, particularizarea variabilelor de tipul $x=3\in\mathbb{R}, y=-1\in\mathbb{R}$ determină propoziția $q(3,-1):\underbrace{\lvert 3+(-1)\rvert}_{2} = \underbrace{\lvert 3\rvert+\lvert -1\rvert}_{4}$ care este falsă, ceea ce este suficient pentru a justifica valoarea de adevăr (0) pentru $(\forall x)(\forall y)q(x,y)$. În cazul în care nu se identifică un contraexemplu, se procedează la construcția unui raționament similar cu cel în care se urmărește atribuirea adevărului, care va conduce la o contradicție sau va evidenția după o serie de etape un caz particular cu valoare de contraexemplu.

Definiția 4: **Un enunț de forma „<u>există</u> $x \in M$ astfel încât $p(x)$” se numește propoziție existențială asociată predicatului $p(x)$. Notația unei astfel de propoziții existențiale este $(\exists x)p(x)$, $x \in M$, unde simbolul $\exists$ - citit există – se numește cuantificator existențial. Valoarea de adevăr a propoziției existențiale $(\exists x)p(x)$, $x \in M$ se stabilește astfel:**

$(\exists x)p(x)$, $x \in M$

$(\exists x)p(x)$ **adevărată (1)**	**Printre propozițiile obținute prin particularizarea variabilei x cu valori din mulțimea M cel puțin una este adevărată.** Exemplu: $p(x): x^2 \le 0, x \in \mathbb{R}$ implică faptul că propoziția existențială $(\exists x)p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ este adevărată (pătratul numărului 0 îndeplinește condiția, fiind și singura valoare care verifică relația de inegalitate).
$(\exists x)p(x)$ **falsă (0)**	**Toate propozițiile obținute prin particularizarea variabilei x cu valori din mulțimea M sunt false, deci nu există nicio valoare din M pentru care se obține propoziție adevărată.** Exemplu: $p(x): x^2 < 0, x \in \mathbb{R}$ implică faptul că propoziția existențială $(\exists x)p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ este falsă (pătratul oricărui număr real nu poate lua valori negative).

Observații și consecințe ale definiției:

1. În cazul predicatului $p(x)$ cu mulțimea de valori ale variabilei notată M, avem:

$p(x)$, $x \in M$

$(\exists x)p(x)$ **(1)**	$A(p) \subset M$ (incluziune strictă)
$(\exists x)p(x)$ **(0)**	$A(p) = \varnothing$

2. În matematică întâlnim propoziții existențiale asociate și unor predicate de mai multe variabile. Exemplificăm pentru cazul unor predicate binare:

$p(x, y)$, $q(x, y)$ - **predicate binare**

$p(x, y): x \cdot y \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$	$(\exists x)(\exists y)p(x, y)$ (1)	Propoziție existențială adevărată, deoarece $p(0, \sqrt{3}): 0 \cdot \sqrt{3} = 0 \notin \mathbb{Q}$, $x = 0 \in \mathbb{Q}, y = \sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Observație: doar pentru valoarea rațională 0 atribuită variabilei x se obține propoziție adevărată!

$q(x,y): x^2+y^2<2xy, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$	$(\exists x)(\exists y)q(x,y)$ (0)	În acest caz toate propozițiile obținute prin atribuirea de valori reale variabilelor x și y sunt false. $x^2+y^2=x^2+y^2-2xy+2xy=$ $=\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}+2xy\geq 0+2xy=2xy$ oricare $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$, deci nicio pereche de numere reale nu verifică inegalitatea din enunțul predicatului $q(x,y)$.
Important!	$(\exists x)(\exists y)q(x,y)$ $(\exists y)(\exists x)q(x,y)$	Cele două propoziții sunt echivalente din punctul de vedere al valorii de adevăr, fie sunt ambele adevărate, fie ambele false.

3. Stabilirea valorii de adevăr a unei propoziții existențiale presupune:

În cazul în care se cere atribuirea valorii de adevăr (1) – propoziție existențială adevărată	Metoda specifică pentru justificare în acest caz este exemplul. Însă nu întotdeauna identificarea exemplului este evidentă. Astfel, în cazul $p(x,y): x\cdot y\in\mathbb{Q}, x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, am ținut cont de proprietatea numărului real 0: produsul oricărui număr real cu 0 este egal cu 0.
	În cazul în care nu se reușește identificarea unui exemplu, este necesară construcția unui raționament care va identifica valorile variabilelor ce vor constitui exemplul necesar. În cazul $r(x,y): 3x+7y=13, x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$, putem parcurge următorii pași de prelucrare a ecuației date: Notând $(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert)=d\in\mathbb{N}$ (cel mai mare divizor comun), rezultă că există $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x=da$ și $y=db$, și $(\lvert a\rvert,\lvert b\rvert)=1$ (prime între ele). Ecuația devine $d(3a+7b)=13$, deci $d\mid 13$, de unde $d=1$ sau $d=13$ Cazul $d=13$ implică $3a+7b=1$. În noua ecuație, exemplificarea este mult mai vizibilă, astfel putând alege $a=-2$ și $b=1$, ceea ce conduce la valorile particulare $x=-26$ și $y=13$. Cum $r(-26,13): 3\cdot(-26)+7\cdot 13=-78+91=13$ (1) – adevărat, rezultă că propoziția existențială $(\exists x)(\exists y)r(x,y)$ este adevărată.
În cazul în care se cere atribuirea valorii de adevăr (0) – propoziție existențială falsă	În acest caz, bazăm argumentarea pe a arăta: - fie că pentru nicio particularizare a variabilelor nu se obțin propoziții adevărate din predicatul aflat în studiu - fie că pentru orice particularizare a variabilelor se obțin doar propoziții false din predicatul aflat în studiu Exemplificare: Asociem predicatului $t(x,y): x^2=y^2+2, x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ propoziția existențială $(\exists x)(\exists y)t(x,y)$.

	Rescriem relația $x^2 = y^2 + 2$ sub forma $x^2 - y^2 = 2$, de unde obținem $(x-y)(x+y) = 2$. Cum $x, y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $x-y, x+y \in \mathbb{Z}$. În plus, $x+y, x-y$ reprezintă suma și diferența a două numere întregi, deci au aceeași paritate (ambele pare sau ambele impare). În aceste condiții, pentru ca produsul $(x-y)(x+y)$ să aibă rezultatul 2, ar trebui să reprezinte produse de tipul $1\cdot 2, (-1)\cdot(-2), 2\cdot 1$ sau $(-2)\cdot(-1)$, dar niciunul dintre produse nu are factorii de aceeași paritate. Astfel, egalitatea $(x-y)(x+y) = 2$, deci și cea inițială, $x^2 = y^2 + 2$, nu poate avea loc pentru nicio pereche de valori atribuite variabilelor, toate propozițiile asociate predicatului fiind false. În concluzie, $(\exists x)(\exists y)t(x, y)$ (0) – propoziție existențială falsă.

Definiția 5: Se consideră mulțimile nevide M_1 și M_2, precum și predicatul binar $p(x, y)$, unde $x \in M_1, y \in M_2$. Scrierile $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ și $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ sunt propoziții și au următoarea semnificație:

$p(x, y)$, $x \in M_1, y \in M_2$

$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$	$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$
Citim: Există $x \in M_1$ astfel încât oricare $y \in M_2$ are loc $p(x, y)$.	Citim: Oricare are fi $x \in M_1$, există $y \in M_2$ astfel încât $p(x, y)$.
Exemplu de propoziții adevărate	
$p(x, y)$: $(x-1)(y+1) = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$	$q(x, y)$: $(x-1)(y+1) = 1$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}, y \in \mathbb{R}$
$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$	$(\forall x)(\exists y)q(x, y)$
Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât oricare $y \in \mathbb{R}$, $(x-1)(y+1) = 0$.	Oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $(x-1)(y+1) = 1$.
Tratăm relația $(x-1)(y+1) = 0$ ca o ecuație în necunoscuta x, cu soluția/soluțiile ecuației independente de y. Astfel, doar pentru cazul $x = 1$ se obține egalitatea cu 0, independent de valorile variabilei y: $(1-1)(y+1) = 0\cdot(y+1) = 0$. În concluzie, $(\forall y)p(1, y)$ este o propoziție universală adevărată, deci și propoziția $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ este adevărată. Citim: ”există cel puțin un x pentru toate valorile lui y astfel încât...”	Tratăm relația $(x-1)(y+1) = 1$ ca o ecuație în necunoscuta y, cu soluția/soluțiile ecuației depinzând de x. Astfel, cum $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, obținem $y+1 = \frac{1}{x-1}$, deci $y = \frac{1}{x-1} - 1$, de unde $y = \frac{2-x}{x-1} \in \mathbb{R}$. În cazul de față, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, există $y = \frac{2-x}{x-1} \in \mathbb{R}$ care verifică relația $(x-1)(y+1) = 1$.

	În concluzie, $p\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{\alpha-1}\right)$ este o propoziție adevărată, oricare $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$ deci și propoziția $(\forall x)(\exists y)q(x,y)$ este adevărată. Citim: ”fiecărui x îi corespunde cel puțin un y astfel încât...”
Observație: Existența nu presupune și unicitate, deși în cazul anterior doar $x=1$ îndeplinește condiția. Astfel, pentru $t(x,y)$: $(x^2-1)(y+1)=0$, $x,y\in\mathbb{R}$ nu mai conduce la unicitate (!).	Observație: Existența lui y pentru fiecare valoare a lui x nu presupune ca la valori diferite ale variabilei x să corespundă valori diferite ale variabilei y, deși cazul anterior are o astfel de corespondență. Astfel, $s(x,y)$: $(x-1)(y+1)=0$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}, y\in\mathbb{R}$ asociază oricărui $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ valoarea $y=-1$.
Exemple de propoziții false	
$p(x,y)$: $(x-1)(y+1)=0$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}, y\in\mathbb{R}$	$q(x,y)$: $(x-1)(y+1)=1$, $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$
$(\exists x)(\forall y)p(x,y)$	$(\forall x)(\exists y)q(x,y)$
Există $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ astfel încât oricare $y\in\mathbb{R}$, $(x-1)(y+1)=0$.	Oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ există $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $(x-1)(y+1)=1$.
În acest caz, pe mulțimile date, relația $(x-1)(y+1)=0$ nu este verificată decât pentru $y=-1$, deci pentru perechi $(x,y)=(x,-1)$, dar nu și pentru perechi în care y poate lua orice valoare, deci mulțimea de adevăr a predicatului este $A(p(x,y))=\{(x,-1)\mid x\in\mathbb{R}-\{-1\}\}$ Propoziția $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$ este falsă.	Pornind de la presupunerea că $(\forall x)(\exists y)q(x,y)$ ar fi adevărată, identificăm următorul contraexemplu: Pentru $x=1$, relația devine $0\cdot(y+1)=1$, relație ce nu este verificată de nicio valoare pentru y, deci $A(p(1,y))=\varnothing$ (mulțimea de adevăr vidă). Propoziția $(\forall x)(\exists y)q(x,y)$ este falsă.
Important!	
Pentru un același predicat binar $p(x,y)$, propozițiile $(\exists x)(\forall y)p(x,y)$ și $(\forall y)(\exists x)p(x,y)$ sunt echivalente din punctul de vedere al valorii de adevăr, fiind fie ambele adevărate, fie ambele false.	