MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare	**Elemente de logică matematică: propoziții, predicate, cuantificatori logici; operații logice elementare, corelare cu operațiile și relațiile cu mulțimi; raționament prin reducere la absurd; inducția matematică; probleme de numărare**

Calcul de sume și produse

Veți găsi aici câteva artificii de calcul pentru sume și produse, pentru deducerea unor rezultate care se pot demonstra ulterior, prin inducție matematică.

1. Suma Gauss

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Demonstrația (calculul sumei):

Artificiul de calcul: Se scrie suma cu termenii în ordine crescătoare, apoi cu termenii în ordine descrescătoare și se însumează cele două egalități.

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \ \ (1)$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \ \ (2)$$

Perechile de termeni egali depărtați de extreme au aceeași sumă:

$1 + n = 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = \cdots = k + (n-k+1) = \cdots = n + 1$.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

$$(+)\ 2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{\text{de } n \text{ ori } (n+1)}$$

$$2S = n \cdot (n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați rezultatul obținut, prin inducție matematică!

Sume Newton uzuale

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>Demonstrația (calculul sumei):</u>

Artificiul de calcul: Folosim formula algebrică $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ și scriem relația pentru fiecare număr natural, de la 1 la n, apoi însumăm relațiile obținute.

$x = 1$	$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
$x = 2$	$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
$x = 3$	$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
.....	.....
$x = n-1$	$n^3 = (n-1)^3 + 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1$
$x = n$	$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$

Însumând relațiile, remarcăm că toate cuburile, de la 2^3 la n^3 se reduc. Obținem:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n \iff$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \iff$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right] \iff$$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2} \iff$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demonstrați rezultatul obținut, prin inducție matematică!

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Artificiul de calcul: Pentru calcul sumei se folosește același raționament ca în cazul anterior, pornind de la egaliatea

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Verificați identitatea de sus, folosind $(x+1)^4 = [(x+1)^2]^2$ și formula binomului sumă la pătrat!

Refaceți raționamentul folosit la demonstrarea sumei 2, apoi demonstrați rezultatul prin inducție matematică.

Sume de puteri cu aceeași bază și exponenți consecutivi

4. $\sum_{k=1}^{n} a^k = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = a \cdot \frac{a^n - 1}{a-1}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

<u>Demonstrație (calcul)</u>

Obs. Pentru $a = 1$, suma devine $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

Pentru $a \neq 1$, notăm suma cerută cu $S = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$.(1)

Artificiul de calcul: Se înmulțește egalitatea (1) cu a, apoi se scad cele două sume.

$$aS = a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} \text{(2)}$$

Scăzând relația (2) din relația (1), obținem $S - aS = a - a^{n+1} = a(1 - a^n) \Leftrightarrow$

$$S(1-a) = a(1-a^n).$$

Cum $1 - a \neq 0$, rezultă $S = \frac{a(1-a^n)}{1-a}, \forall a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, sau $S = \frac{a(a^n-1)}{a-1}, \forall a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrați rezultatul obținut, prin inducție matematică!

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = (?)$

Artificiul de calcul: Se folosesc primul și ultimul factor din produsul de la numitor. Diferența lor este:

$$(k+3) - k = 3$$

Se amplifică fracția cu 3, pentru ca acesta să apară la numărător, apoi, la numărător, se adună și se scade k, iar diferența de termeni obținută la numărător se distribuie la numitor.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{3k(k+1)(k+2)(k+3)} =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+3)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{k}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$$

Apoi desfășurăm suma, ”telescopic” (scriem diferențele una sub alta) și, cu două excepții, termenii se reduc în diagonală.

Suma va fi, în final :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right],$$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cancel{k+3}}{k(k+1)(k+2)\cancel{(k+3)}}-\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)(k+2)(k+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\dots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

Demonstrați rezultatul obținut, prin inducție matematică!

Observație: Artificiul este util pentru fracții care au numitorul un produs de (oricâți) factori naturali consecutivi.

Exersați acest artificiu de calcul pentru a calcula următoarele sume:

5a. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 5b. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 5c. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$ 5d. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$

6. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=(?)$

Artificiul de calcul: Se descompune diferența de pătrate, apoi se grupează produsul diferențelor, respectiv produsul sumelor. În fiecare produs, factorii se simplifică în diagonală.

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\cdot\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)\Rightarrow$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Demonstrați rezultatul obținut, prin inducție matematică!

7. $\prod_{k=0}^{n}\left(1+2^{2^k}\right)=(?)$

Desfășurând produsul, obținem: $\prod_{k=0}^{n}\left(1+2^{2^k}\right)=(1+2)(1+2^2)(1+2^4)\cdot\ldots\cdot\left(1+2^{2^n}\right)$

Artificiul de calcul: Produsul (desfășurat) se înmulțește cu $(1-2)$, provenit din primul factor al lui P în care am schimbat semnul dintre termeni, apoi aplicăm formula algebrică a diferenței de pătrate.

Notând produsul dat cu P, obținem:

$$P(1-2)=(1-2)(1+2)(1+2^2)(1+2^4)\cdot\ldots\cdot\left(1+2^{2^n}\right)$$

$$P=2^{2^{n+1}}-1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$P\cdot(-1)=\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(1-2)(1+2)}_{(1-2^2)}(1+2^2)}_{(1-2^4)}(1+2^4)}_{(1-2^8)}\cdot\ldots\cdot\left(1+2^{2^n}\right)}_{1-2^{2^{n+1}}}$$

$$1-\left(2^{2^n}\right)^2=1-2^{2^n\cdot 2}=1-2^{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow -P=1-2^{2^{n+1}} \Rightarrow P=2^{2^{n+1}}-1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstrați rezultatul obținut, prin inducție matematică!

Exersați acest artificiu de calcul pentru a calcula produsele:

7a. $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)$

7b. $\prod_{k=1}^{n}\left(1+3^{2^k}\right)$

Recomandare:

Pentru demonstrarea prin inducție matematică, folosiți forma desfășurată a sumelor sau produselor prezentate.