Unitatea de învățare	Elemente de logică matematică: calcul de sume și de produse

Videoclip: reguli de sumare; sume condensate; optimizarea scrierii și a calculelor.

Ce învățăm din clip:

- **să utilizăm limbajul matematic** pentru condensarea scrierii unor sume sau a unor produse;
- **să utilizăm scrieri standardizate și proprietăți** ale operațiilor algebrice pentru **optimizarea** calculului;
- **să deducem rezultate** pe care să le validăm utilizând inducția matematică.

Ați întâlnit, pe parcursul orelor de matematică, sume care aveau atât de mulți termeni, că nu-i puteam scrie pe toți.

$1+2+3+\cdots+n$ este o astfel de sumă. Este ceea ce cunoaștem sub numele ”suma lui Gauss”. Pentru a scrie mai ușor această sumă și altele asemănătoare, vom folosi litera grecească $\sum$-sigma. Vă invit să găsiți, în secțiunea ”Extra” a acestui site, lista de litere grecești pe care le folosim în matematică.

Scrierea $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se citește: ”$sumă, de\ la\ k=1\ la\ n, din\ a_k$” și reprezintă scrierea condensată a unei sume cu termen general a_k care se calculează după o anumită regulă, iar desfășurată înseamnă: $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$. I-am dat lui k valori naturale consecutive, obținând pe rând termenii $a_1, a_2, \dots, a_n$, iar între ei vom așeza totdeauna semnul ”+”. Vom spune că semnul de sumă condensată ”ține locul plusurilor”. Egalitatea se poate citi de la membrul stâng spre membrul drept, iar în acest caz spunem că am desfășurat suma, sau se poate citi de la membrul drept spre cel stâng, caz în care spunem că am scris suma condensat.

Suma lui Gauss poate fi scrisă condensat pentru că termenii respectă o anumită regulă de formare. Se adună numere naturale consecutive, primul fiind 1, ultimul fiind n.

Deci $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$. Pentru fiecare valoare a lui k, obținem termeni ai sumei: pentru $k=1$, obținem primul termen al sumei (1), pentru $k=2$ obținem al doilea termen al sumei (2),..., iar pentru $k=n$ obținem ultimul termen al sumei (n).

În același mod, putem avea $1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+100\cdot 3^{100}$. Remarcăm faptul că termenii acestei sume respectă regula de a fi produse între puteri ale lui 3 și numere egale cu exponenții lui 3. Suma se va scrie condensat, cu termen general $k\cdot 3^k$, unde primul termen al sumei se obține pentru $k = 1$, care se așează sub litera $\sum$, iar ultimul termen se obține pentru 100, care se așează deasupra literei $\sum$.

Citim ”sumă de la $k = 1$ la 100 din $k \cdot 3^k$”.

Sau, putem avea: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{50\cdot 51}$. Toți termenii sumei sunt fracții cu numărătorul 1, iar numitorul este produs de numere naturale consecutive. Deci termenul general al sumei este $\frac{1}{k(k+1)}$, primul termen al sumei obținându-se pentru $k = 1$, iar ultimul pentru $k = 50$.

Deci, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{50\cdot 51} = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}$.

Putem avea, de asemenea, suma condensată $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ pe care o vom desfășura. Termenii acestei sume vor fi calculați după regula dată de termenul general, pentru fiecare valoare naturală a lui k, de la 1 la 20. Pentru $k = 1$ se obține primul termen $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$, pentru $k = 2$, al doilea termen este $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, și așa mai departe, ultimul termen, pentru $k = 20$, va fi $\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{20}}$.

Deci, $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{20}}$.

Un alt exemplu este $\sum_{k=0}^{15} 2^k$. În desfășurarea acestei sume, primul termen este 2^0, urmează $2^1, 2^2$ și așa mai departe, până la 2^{15}.

$$\sum_{k=0}^{15} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{15}.$$

Vom trece, astfel, fie de la forma condensată la forma desfășurată, fie invers.

Există, însă, niște reguli de sumare de catre trebuie să ținem seama.

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (suma dintr-un termen general, care, la rândul lui este o sumă, se desface într-o sumă de sume care păstrează ca termen general fiecare componentă a termenului general)

2) $\sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, α (constant) iese în fața sumei (este factor comun).

Demonstrarea celor două proprietăți se bazează pe asociativitatea și comutativitatea adunării numerelor reale, dar și pe distributivitatea înmulțirii față de adunare.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n = \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Mare atenție, că aceste reguli de sumare nu se referă la sume care au termeni generali produse sau rapoarte.

În general, $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \neq (\sum_{k=1}^{n} a_k) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k)$ și $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$

Pentru exemplificarea unei astfel de relații, alegem un exemplu simplu: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \neq \frac{1+2}{2+3}$.