Unitatea de învățare	Elemente de logică matematică: calcul de sume și de produse

Videoclip: reguli de sumare; sume și produse condensate; optimizarea scrierii și a calculelor.

Ce învățăm din clip:

- **să utilizăm limbajul matematic** pentru condensarea scrierii unor sume sau a unor produse;
- **să utilizăm scrieri standardizate și proprietăți** ale operațiilor algebrice pentru **optimizarea** calculului;
- **să deducem rezultate** pe care să le validăm utilizând inducția matematică.

Vom calcula o sumă și un produs, folosind scrierea lor condensată.

Suma este $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=2+5+8+\cdots+(3n-1)$

Este convenabil să folosim scrierea condensată, pentru că scriem mai puțin. Dar, pentru aceasta, este necesar să folosim niște sume pe care le cunoaștem deja. În materialul teoretic veți găsi exemple de astfel de sume.

$$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Să vedem cum putem utiliza aceste în sume în calculul nostru.

Folosind regulile de sumare, $\sum_{k=1}^{n}(3n-1)=\sum_{k=1}^{n}3k-\sum_{k=1}^{n}1$. Prima sumă are, în termenul general, un factor constant, care iese factor comun:

$$\sum_{k=1}^{n}(3n-1)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$

iar $\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{de\ n\ ori\ 1}=n$.

Înlocuind suma lui Gauss cu $\frac{n(n+1)}{2}$, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}(3n-1) = 3\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{3n(n+1)-2n}{2} = \frac{n(3n+3-2)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Pentru a căpăta încredere în rezultatele pe care le obțineți, aceste sume (veți vedea și produse) se pot verifica, demonstrându-le prin inducție. Dacă pasul inductiv nu iese, înseamnă că ați greșit undeva la calcul. Rezultatele incorecte pot fi dezvăluite chiar din etapa de verificare.

Pentru produsul condensat vom folosi litera grecească Π -pi (litera mare). Produsul condensat scris astfel:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

cu factorul general a_k înseamnă să calculăm factorii pentru fiecare valoare a lui k de la 1 la n, iar între factori punem semnul de înmulțire ”$\cdot$ ”.

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

În partea dreaptă a egalității, spunem că am desfășurat produsul, iar în partea stângă, spunem că am scris produsul condensat. Pentru calculul acestor produse, există niște reguli pe care le putem aplica, pentru optimizarea calculului, așa cum avem și reguli de sumare.

Reguli:

1) $\prod_{k=1}^{n}(a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ (avem de efectuat doar operații de același ordin, iar înmulțirea numerelor reale este asociativă și comutativă)

2) $\prod_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$ (factorul constant α apare în fiecare factor al produsului, deci apare înmulțit, repetat, cu el însuși de n ori, ceea ce conduce la α^n)

3) $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$ (produsul cu factor general $\frac{a_k}{b_k}$ înseamnă să înmulțim fracțiile $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, deci $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$)

Mare atenție, că produsul dintr-un factor general care este o sumă, nu se scrie altfel. În general:

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \neq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$$

Vom calcula un produs, scris inițial condensat, folosind aceste reguli:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{3k+3} = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{3n+3}$$

Nu este avantajos să calculăm produsul scris desfășurat, ca în partea dreaptă. Încercăm să aplică produsului condensat regulile menționate anterior.

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{3k+3} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{3(k+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\cdot\frac{k}{k+1}$$

Cum factorul $\frac{2}{3}$ este constant, putem scrie:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\cdot\frac{k}{k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$$

Produsul rămas are factorul general mai simplu, așa că îl vom desfășura:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{3k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\right)$$

Remarcăm că factorii se simplifică pe diagonală și toate diagonalele paralele cu prima conțin factori care se simplifică. După simplificare, produsul rămâne:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{3k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$