Unitatea de învățare	Mulțimea numerelor reale: partea întreagă a unui număr real

Videoclip: Rezolvarea unei ecuații cu parte fracționară care se reduce la o ecuație cu parte întreagă.

Ce învățăm din videoclip?

- **să analizăm datele unei** probleme și **să redactăm** rezolvarea,
- **să conectăm conceptele** studiate pentru optimizarea calculelor,
- **să validăm rezultatele obținute** rezultatele.

Ne propunem să rezolvăm ecuația $\left\{\frac{x}{2}\right\} = x - \frac{1}{3}$, unde x este un număr real.

Înainte de a rezolva ecuația, analizăm cei doi membri ai acestei egalități. Partea fracționară a numărului $\frac{x}{2}$ este un număr cuprins între 0 (inclusiv) și 1 (exclusiv). Pentru ca egalitatea să poată avea loc, este necesar ca membrul drept să fie un număr din același interval. Deci soluția pe care o vom găsi, pentru această ecuație, trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$0 \leq x - \frac{1}{3} < 1$$

Adunând $\frac{1}{3}$ în cei trei membri ai acestei duble inegalități obținem:

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{4}{3}$$

Numărul x, care satisface inegalitatea noastră este un număr real cuprins între $\frac{1}{3}$ și $\frac{4}{3}$.

Partea fracționară a unui număr real α este, prin definiție, diferența dintre număr și partea lui întreagă, oricare ar fi numărul real α. Aplicând această definiție părții fracționare din $\frac{x}{2}$, ecuația se transformă în:

$$\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] = x - \frac{1}{3}$$

Separând partea întreagă din această ecuație, obținem:

$$\left[\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2} - x + \frac{1}{3}$$

După ce aducem la același numitor termenii din membrul drept, obținem:

$$\left[\frac{x}{2}\right] = \frac{2 - 3x}{6}$$

Dintr-o ecuație cu parte fracționară, așa cum am avut la început, am ajuns la o ecuație cu parte întreagă. Partea întreagă a unui număr real este totdeauna un număr întreg, deci, pentru ca această egalitate să fie posibilă, membrul drept trebuie să fie număr întreg.

Vom nota valoarea comună a celor două expresii cu k, dar k trebuie să fie număr întreg. Vom egala fiecare membru al ecuației cu k.

Partea întreagă a lui $\frac{x}{2}$ este egală cu k, ceea ce înseamnă că numărul $\frac{x}{2}$ este cuprins între k și $k + 1$. Pe de altă parte, $\frac{2-3x}{6} = k$ va conduce la $x = \frac{2-6k}{3}$. Cum x este un raport între două numere întregi, înseamnă că el este un număr rațional și nu parcurge un întreg interval de numere reale. Va fi deci un număr rațional, cuprins între $\frac{1}{3}$ și $\frac{4}{3}$.

Inegalitatea dublă de mai sus, are două variabile, x și k. Dintre acestea, mai avantajoasă este k, pentru că este număr întreg, iar numerele întregi se pot alege ușor din intervale de numere reale.

Vom înlocui pe x cu expresia lui $\frac{2-6k}{3}$ în inecuația dublă anterioară. Vom obține:

$$k \leq \frac{2 - 6k}{6} < k + 1$$

unde termenul din mijloc s-a obținut împărțind x la 2. Simplificăm fracția din mijloc prin 2, deci:

$$k \leq \frac{1 - 3k}{3} < k + 1$$

Putem înmulți această inecuație cu 3, acesta fiind număr pozitiv, inegalitățile nu se schimbă și obținem inegalitatea dublă : $3k \leq 1 - 3k < 3k + 3$, care se transformă într-un sistem de inecuații:

Pe de-o parte $3k \leq 1 - 3k$, de unde deducem $k \leq \frac{1}{6}$.

Pe de altă parte, $1 - 3k < 3k + 3$, care conduce la $k > -\frac{2}{6}$, deci $k > -\frac{1}{3}$.

Cele două realții trebuie satisfăcute simultan. Intersectând cele două intervale, obținem k aparținând intervalului deschis în $-\frac{1}{3}$, închis în $\frac{1}{6}$. Dar k era număr întreg, deci acest interval se intersectează și cu mulțimea numerelor întregi. Cum singurul număr întreg din intervalul $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right]$ este 0, rezultă că singura valoare posibilă pentru k este 0. Înlocuind această valoare în expresia lui x, care era $\frac{2-6k}{3}$, obținem soluția ecuației $x = \frac{2-6\cdot 0}{3}$, adică $x = \frac{2}{3}$.

Acest număr este rațional, așa cum am dedus pe parcurs și este cuprins între $\frac{1}{3}$ și $\frac{4}{3}$, așa cum am găsit din condiția impusă la început.

Vom verifica această soluție în ecuația inițială și ar fi foarte bine dacă fiecare soluție pentru o ecuație ați verifica-o în ecuația inițială. Ce înseamnă să verificăm? Înseamnă să calculăm fiecare membru al egalității inițiale pentru $x = \frac{2}{3}$.

Membrul stâng al ecuației noastre, calculat pentru $x = \frac{2}{3}$ va fi parte fracționară din $\frac{2}{3}$ ori $\frac{1}{2}$, adică parte fracționară din $\frac{1}{3}$. Aplicând definiția, aceasta va fi $\frac{1}{3}$ minus partea întreagă a lui $\frac{1}{3}$, adică $\frac{1}{3}$ minus 0, deci $\frac{1}{3}$.

Membrul drept al ecuației, calculat pentru $x = \frac{2}{3}$ devine $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, adică $\frac{1}{3}$. Am obținut același număr, deci cei doi membri ai ecuației sunt egali pentru $x = \frac{2}{3}$, așadar $\frac{2}{3}$ verifică ecuația.

Mulțimea soluțiilor este mulțimea formată dintr-un singur element, $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$