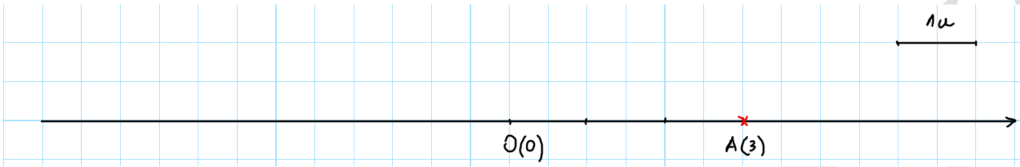
MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

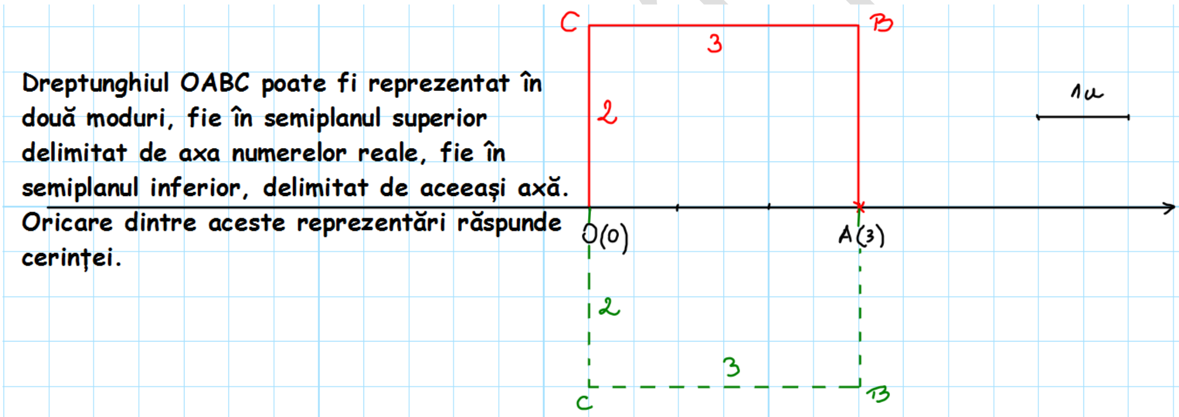
Unitatea de învățare	Mulțimea numerelor reale

Activitate de învățare ghidată

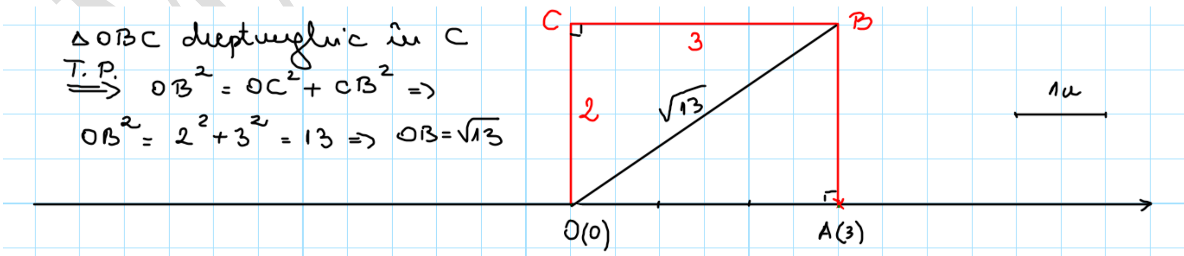
1. Reprezentați, pe axa numerelor reale, punctul A de abscisă 3.



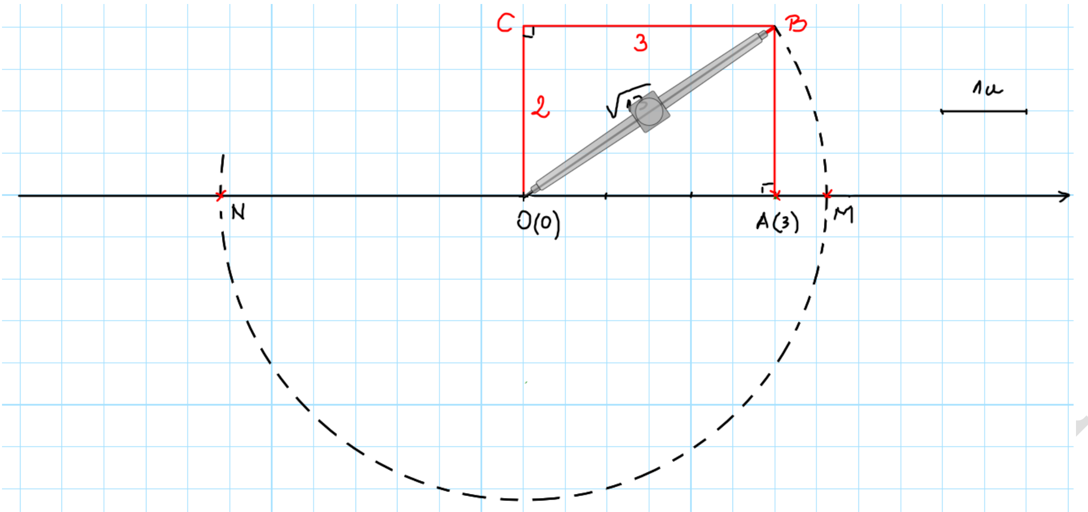
2. Desenați un dreptunghi care are o latură segmentul OA, unde O este originea axei, iar cealaltă latură are lungimea 2 (două unități de măsură). Notați dreptunghiul OABC.



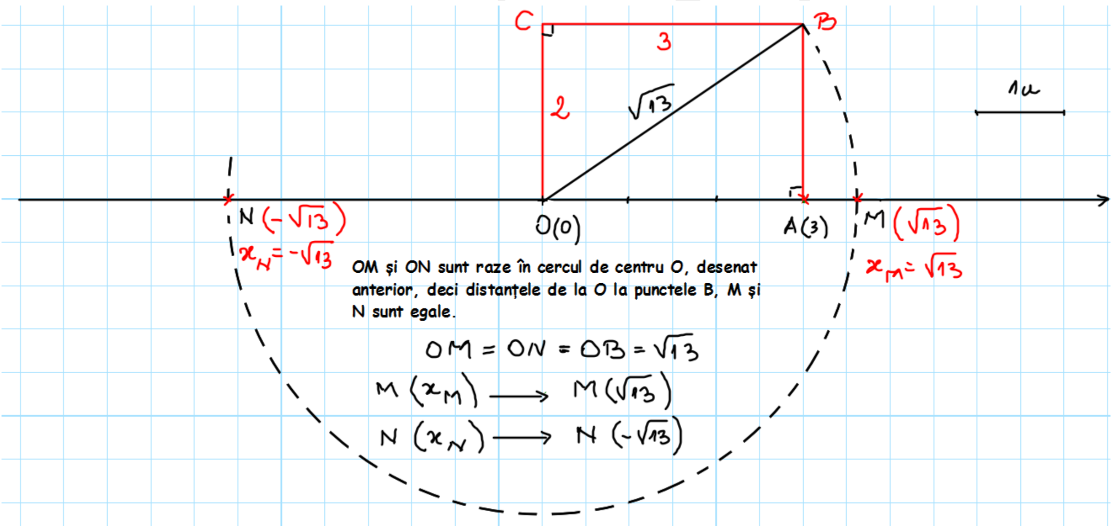
3. Calculați, folosind teorema Pitagora, lungimea diagonalei acestui dreptunghi.



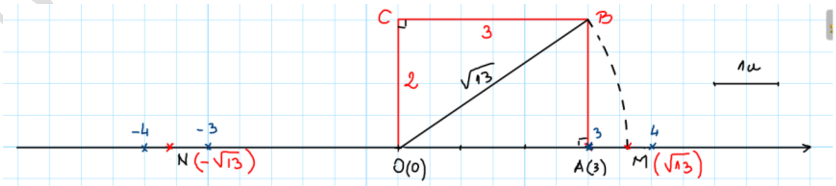
4. Luați în deschizătura compasului lungimea diagonalei dreptunghiului OABC, apoi, cu vârful compasului în originea axei, desenați un arc de cerc care intersectează axa în două puncte M și N, astfel încât A să fie așezat între O și M.



5. Stabiliți ce valori au abscisele punctelor M și N pe axa numerelor reale. Veți nota x_M abscisa punctului M și x_N abscisa punctului N.



6. Reprezentați pe axă numerele întregi consecutive care încadrează abscisa punctului M. Răspundeți la aceeași cerință și pentru punctul N.

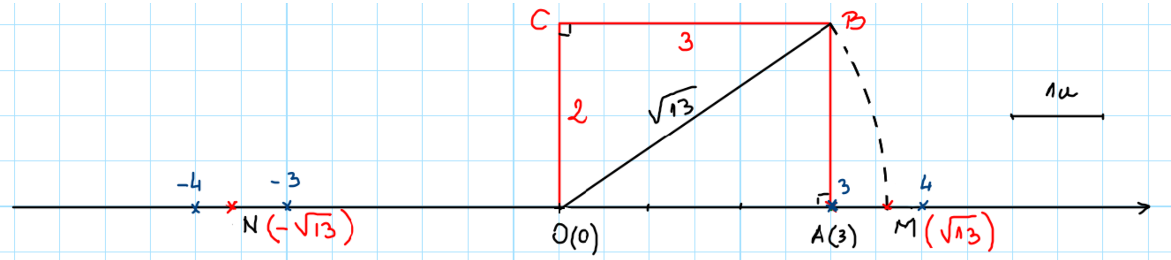


$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{13} < 4 \Rightarrow$ numerele întregi între care se încadrează $\sqrt{13}$ sunt 3 și 4.

Cum $3 < \sqrt{13} < 4 \,/\cdot(-1) \Rightarrow -3 > -\sqrt{13} > -4$ sau $-4 < -\sqrt{13} < -3$

$\Rightarrow$ numerele întregi între care se încadrează $-\sqrt{13}$ sunt -4 și -3.

7. Deduceți, folosind reprezentarea pe axă și definițiile părții întregi și părții fracționare ale unui număr real, care sunt părțile întregi și care sunt părțile fracționare ale numerelor x_M și x_N.



Din reprezentarea pe axă, deducem că cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu $-\sqrt{13}$ este -4.

$\Rightarrow [x_N] = [-\sqrt{13}] = -4$.

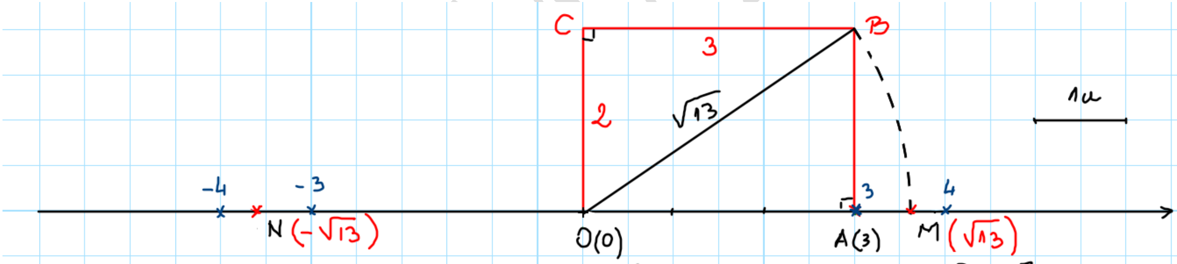
$\{x_N\} = x_N - [x_N] = -\sqrt{13} - (-4) = 4 - \sqrt{13}$

Din reprezentarea pe axă, deducem că cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu $\sqrt{13}$ este 3.

$\Rightarrow [x_M] = [\sqrt{13}] = 3$.

$\{x_M\} = x_M - [x_M] = \sqrt{13} - 3$

8. Stabiliți dacă $[x_N] = -[x_M]$ și dacă $\{x_N\} = \{x_M\}$.



$[x_N] = -4$, $[x_M] = 3 \Rightarrow [x_N] \neq -[x_M]$

$\{x_N\} = 4 - \sqrt{13}$, $\{x_M\} = \sqrt{13} - 3 \Rightarrow \{x_N\} \neq \{x_M\}$

9. Demonstrați că $[-x] = -[x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

$[-x] = -[x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

„$\Rightarrow$" (implicația directă)

ipoteza	concluzia
$[-x] = -[x]$	$x \in \mathbb{Z}$

Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow k \le x < k+1 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow -k \geq -x > -k-1 \Rightarrow -x \in (-k-1, -k]$, deci

$[-x] = \begin{cases} -k-1, & \text{dacă } -k-1 < -x < -k \\ -k, & \text{dacă } -x = -k \end{cases} \Leftrightarrow [-x] = \begin{cases} -k-1, & \text{dacă } x \in (k, k+1) \\ -k, & \text{dacă } x = k \end{cases}$

Cum $[-x] = -[x]$ și pe intervalul $(k, k+1)$ această egalitate nu poate fi adevărată ($[-x] = -k-1$, iar $-[x] = -k$), rezultă că $x = k$, dar $k \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \mathbb{Z}$.

„$\Leftarrow$" (implicația inversă)

ipoteza	concluzia
$x \in \mathbb{Z}$	$[-x] = -[x]$

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $-x \in \mathbb{Z}$.

Cum $[\alpha] = \alpha$, oricare ar fi numărul întreg α, rezultă că

$\left.\begin{array}{l} [-x] = -x \\ [x] = x \end{array}\right\} \Rightarrow [-x] = -[x]$.

Din cele două demonstrații, rezultă $[-x] = -[x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

10. Demonstrați că x_M nu este număr rațional.

$x_M = \sqrt{13}$

Presupunem că $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}$, deci există $m, n \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\sqrt{13} = \frac{m}{n}$.

Cum $\sqrt{13} > 0$, putem considera $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$ ceea ce înseamnă că m și n sunt numere prime între ele.

$\sqrt{13} = \frac{m}{n} \Rightarrow 13 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \underset{(1)}{13 n^2 = m^2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 13 \mid m^2 \\ 13 \text{ număr prim} \end{array}\right\} \Rightarrow 13 \mid m$

Deci $m = 13k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind noua formă a lui m în (1) rezultă $13 n^2 = (13k)^2 \Rightarrow 13 n^2 = 13^2 \cdot k^2 \;/ : 13 \Rightarrow n^2 = 13 k^2$, deci

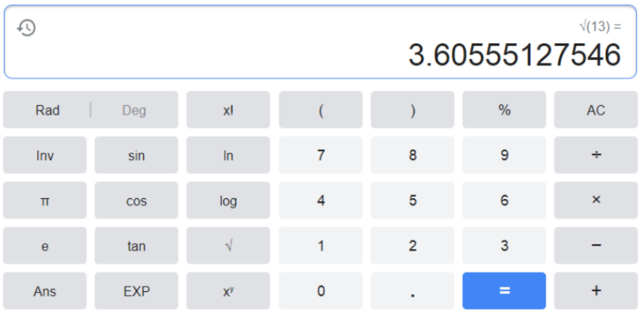
$\left.\begin{array}{l} 13 \mid n^2 \\ 13 \text{ prim} \end{array}\right\} \Rightarrow 13 \mid n$

Cum $13 \mid n$ și $13 \mid m \Rightarrow 13 \mid \underbrace{c.m.m.d.c(m, n)}_{1} \Rightarrow 13 \mid 1$ fals $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ presupunerea este falsă, deci

$\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$

11. Folosiți un calculator pentru afișarea numărului x_M, apoi scrieți aproximările prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât $\frac{1}{10}$, ale numerelor x_M și x_N.



$x_M = \sqrt{13} = 3,60555127546....$

Aproximarea prin lipsă, cu o eroare mai mică decât 1/10: $x_M \simeq 3,6$

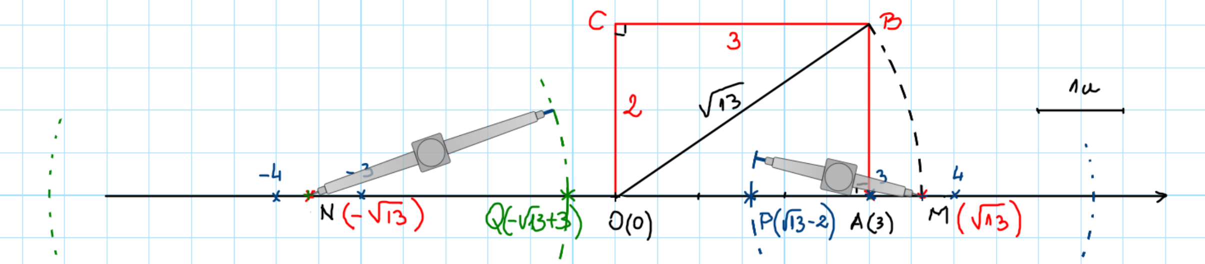
Aproximarea prin adaos, cu o eroare mai mică decât 1/10: $x_M \simeq 3,7$

$x_N = -\sqrt{13} = -3,60555127546...$

Aproximarea prin lipsă, cu o eroare mai mică decât 1/10: $x_N \simeq -3,7$

Aproximarea prin adaos, cu o eroare mai mică decât 1/10: $x_N \simeq -3,6$

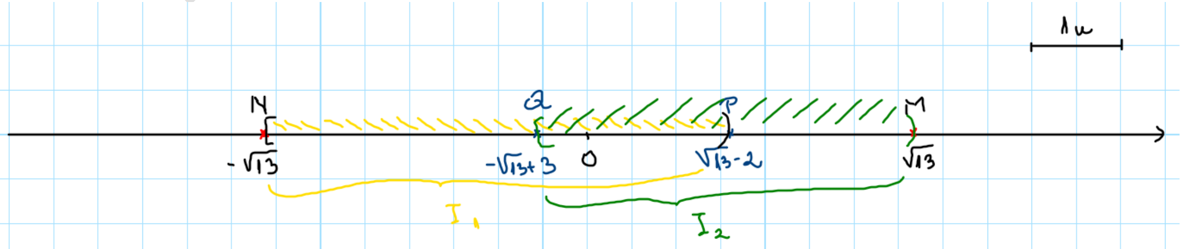
12. Reprezentați pe axa numerelor reale, folosind compasul, punctele $P(x_P)$ și $Q(x_Q)$ știind că $x_P = x_M - 2$ și $x_Q = x_N + 3$.



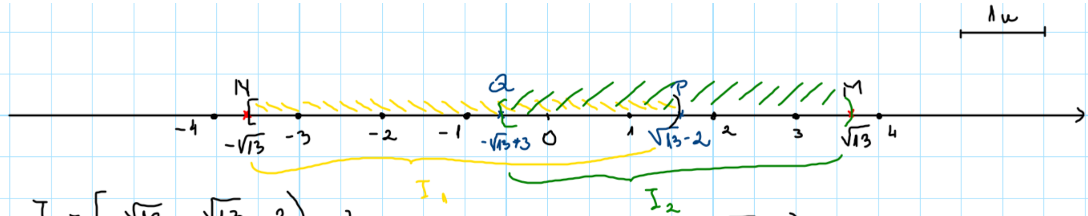
Pentru reprezentarea lui x_M-2, luăm în deschizătura compasului 2 unități (de exemplu segmentul AB), apoi, cu vârful compasului în punctul M, trasăm un arc de cerc. Punctul P are abscisa $x_P = \sqrt{13}-2$ și va fi punctul de intersecție dintre arcul de cerc și segmentul OM.

Pentru reprezentarea lui x_N+3, luăm în deschizătura compasului 3 unități (de exemplu segmentul OA), apoi, cu vârful compasului în punctul N, trasăm un arc de cerc. Punctul Q are abscisa $x_Q = -\sqrt{13}+3$ și va fi punctul de intersecție dintre arcul de cerc și segmentul NO.

13. Hașurați, cu culori diferite, pe axă, reprezentarea intervalelor $[x_N, x_P)$ și $[x_Q, x_M)$.



14. Notând $I_1 = [x_N, x_P)$ și $I_2 = [x_Q, x_M)$, aflați: $I_1 \cap I_2$; $I_1 \cup I_2, I_1 \setminus I_2$; $I_2 \setminus I_1$; $(I_1 \cup I_2) \cap \mathbb{Z}$, $C_{\mathbb{R}}(I_1)$.



$$\left.\begin{array}{l} I_1 = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}-2) \\ I_2 = [-\sqrt{13}+3, \sqrt{13}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

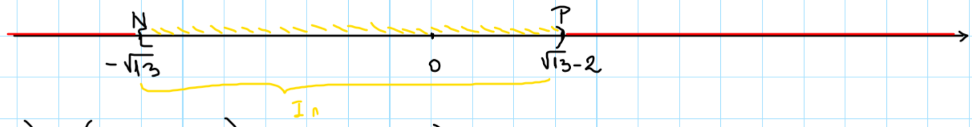
$I_1 \cap I_2 = [-\sqrt{13}+3, \sqrt{13}-2)$ partea hașurată cu ambele culori

$I_1 \cup I_2 = [-\sqrt{13}, \sqrt{13})$ partea hașurată cu cel puțin o culoare

$I_1 \setminus I_2 = [-\sqrt{13}, -\sqrt{13}+3)$ partea hașurată cu galben, dar nehașurată cu verde

$I_2 \setminus I_1 = [\sqrt{13}-2, \sqrt{13})$ partea hașurată cu verde, dar nehașurată cu galben

$$(I_1 \cup I_2) \cap \mathbb{Z} = [-\sqrt{13}, \sqrt{13}) \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$



$C_{\mathbb{R}}(I_1) = (-\infty, -\sqrt{13}) \cup [\sqrt{13}-2, \infty)$ partea care nu este hașurată cu galben

Observație: Acordați atenție tipului de interval - închis/deschis!

15. Aflați cel mai mic număr natural y pentru care numărul $\frac{3y-1}{5}$ aparține intervalului $I_3 = C_{\mathbb{R}}(I_1)$.

$$I_3 = C_{\mathbb{R}}(I_1) = (-\infty, -\sqrt{13}) \cup [\sqrt{13}-2, \infty)$$

$$\frac{3y-1}{5} \in I_3 \iff \left\{\begin{array}{l} \frac{3y-1}{5} < -\sqrt{13} \iff \left.\begin{array}{l} y < \frac{-5\sqrt{13}+1}{3} < 0 \\ y \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in \emptyset \\ \text{sau} \\ \frac{3y-1}{5} \geq \sqrt{13}-2 \iff \left.\begin{array}{l} y \geq \frac{5\sqrt{13}-9}{3} \\ y \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \end{array}\right.$$

$$y \in \left[\frac{5\sqrt{13}-9}{3}, \infty\right) \cap \mathbb{N}$$

Cel mai mic număr natural din intervalul $\left[\frac{5\sqrt{13}-9}{3}, \infty\right)$ este $y_0 = \left[\frac{5\sqrt{13}-9}{3}\right] + 1$ ← partea întreagă

$$y_0 = \left[\frac{5\sqrt{13}}{3} - \underbrace{3}_{\in \mathbb{Z}}\right] + 1 = \left[\frac{5\sqrt{13}}{3}\right] - 3 + 1 = \left[\frac{5\sqrt{13}}{3}\right] - 2$$

Pentru a afla partea întreagă a numărului $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ veți încadra numărul între doi întregi consecutivi.

$$5\sqrt{13} = \sqrt{25 \cdot 13} = \sqrt{325} \quad \text{și} \quad \sqrt{18^2} = \sqrt{324} < \sqrt{325} < \sqrt{361} = \sqrt{19^2}$$

$$\Rightarrow 18 < \sqrt{325} < 19 \;|:3 \Rightarrow 6 < \frac{5\sqrt{13}}{3} < \frac{19}{3} \Rightarrow \left[\frac{5\sqrt{13}}{3}\right] = 6$$

Deci $y_0 = 6 - 2 = 4.$

Observație: Numărul $\frac{5\sqrt{13}-9}{3}$ nu este număr natural, deci nu poate fi chiar el elementul cerut. Se caută primul număr **natural** mai mare sau egal cu acesta.