

Unitatea de învățare **Mulțimea numerelor reale: partea întreagă și partea fracționară a unui număr real**

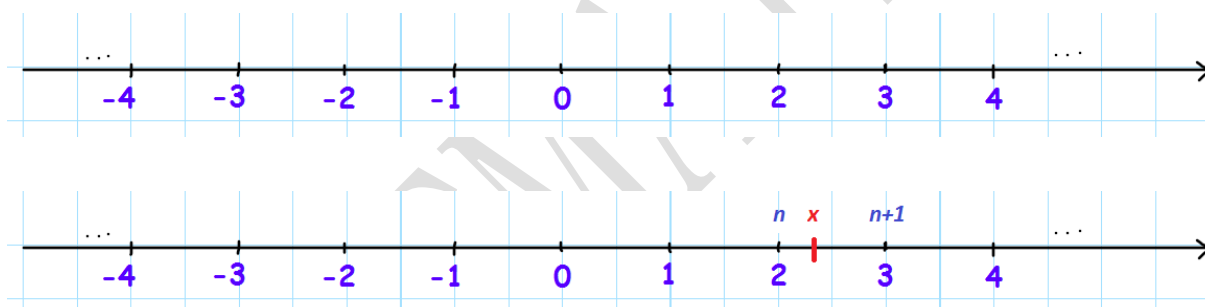
Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Partea întreagă a unui număr real

După reprezentarea pe axa numerelor reale a numerelor întregi, constatăm că orice număr real se va reprezenta fie suprapus peste unul dintre numerele întregi existente pe axă, fie între două numere întregi consecutive. Acest fapt exprimă esența axiomei lui Arhimede.

Axioma lui Arhimede:

Pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$, există un unic număr întreg n astfel încât $n \leq x < n + 1$.



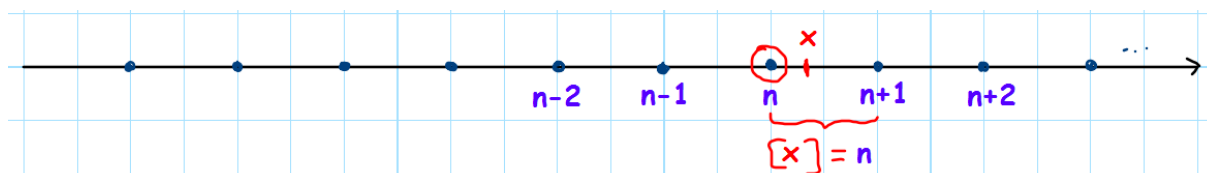
Definiție:

Partea întreagă a numărului real x , notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg dintre cele care sunt mai mici sau egale cu numărul x .

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

În reprezentarea pe axa numerelor reale, partea întreagă a numărului real x este numărul întreg reprezentat în imediata apropiere, în partea stângă a numărului x , când x nu este număr întreg, sau chiar x , dacă acesta este întreg.

Așadar, dacă $x \in [n, n + 1)$, unde $n \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] = n$.



Numerele întregi mai mici sau egale cu x sunt reprezentate pe axă în stânga lui:

$$\dots, n - 2, n - 1, n, \text{ iar cel mai mare dintre acestea este } n.$$

Cum n este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul dat, rezultă că toate numerele întregi mai mari ca n vor fi (și) mai mari ca x și se vor reprezenta pe axă în dreapta acestuia.

Deci, conform definiției, $[x] \leq x < [x] + 1$, **oricare ar fi** $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1:

Aflați partea întreagă a fiecărui număr din lista următoare:

$$-\frac{7}{3}; -\sqrt{2}; -0,4; \frac{3}{2}; \pi; \sqrt{n^2 + n}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}$$

Identificarea corectă a părții întregi a unui număr real presupune încadrarea acestuia între două numere întregi consecutive.

$$-\frac{7}{3} = -2, (3), \text{ deci } -3 \leq -\frac{7}{3} < -2 \Rightarrow \left[-\frac{7}{3}\right] = -3$$

$$-\sqrt{2} = -1,4142 \dots, \text{ deci } -2 \leq -\sqrt{2} < -1 \Rightarrow [-\sqrt{2}] = -2$$

$$-0,4 \in [-1, 0) \Rightarrow [-0,4] = -1$$

$$\frac{3}{2} = 1,5 \in [1, 2) \Rightarrow \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

$$\pi = 3,1415 \dots \in [3, 4) \Rightarrow [\pi] = 3$$

Pentru ultimul număr, vom încadra $n^2 + n$ între două pătrate perfecte consecutive:

$$n^2 \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ deci } \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2 + n} < \sqrt{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow n \leq \sqrt{n^2 + n} < n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Conform definiției, $[\sqrt{n^2 + n}] = n$, **oricare ar fi** $n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 2:

Câte numere din mulțimea $M = \{1, 2, \dots, 50\}$ sunt divizibile cu 7?

Numerele divizibile cu 7, din mulțimea dată, sunt numere de forma $7k$, $k \in \mathbb{N}$, mai mari sau egale cu 1 și mai mici sau egale cu 50.

$$1 \leq 7k \leq 50 \Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq k \leq \frac{50}{7}, \text{ dar } k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \left[\frac{1}{7}, \frac{50}{7}\right] \cap \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, 7\}$$

unde, remarcăm faptul că $\frac{50}{7} \notin \mathbb{N}$, iar ultimul număr natural care poate fi valoare a lui k este $\left[\frac{50}{7}\right] = 7$.

Așadar, numărul de numere divizibile cu 7, din mulțimea M este egal cu $\left[\frac{50}{7}\right] = 7$.

Generalizare: Numărul de numere divizibile cu $p \in \mathbb{N}^*$, din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ este egal cu $\left[\frac{n}{p}\right]$.

Atenție! Dacă aceeași problemă se pune pentru elementele mulțimii $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$, atunci numărul de numere divizibile cu $p \in \mathbb{N}^*$ este $\left[\frac{n}{p}\right] + 1$, dat fiind că 0 este multiplu universal, deci îndeplinește condiția.

Proprietăți ale părții întregi

- 1) $[x] \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (conform definiției)
- 2) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$. (partea întreagă a unui număr întreg este egală cu numărul dat)
- 3) $[x] \leq x < [x] + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (conform definiției)
- 4) $x - 1 < [x] \leq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (rezultă din proprietatea 3), separând partea întreagă din a doua inegalitate)
- 5) $[x + k] = [x] + k$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și **oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$** (numerele întregi adunate cu un număr real ies în afara părții întregi)

Demonstrația:

Fie $x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{Z}$. Numărul x se poate încadra între doi întregi consecutivi, deci există un unic număr întreg p astfel încât $p \leq x < p + 1$. Adunând k în toți cei membri ai inegalității, obținem

$$p + k \leq x + k < p + k + 1.$$

Cum $p + k$ și $p + k + 1$ sunt numere întregi consecutive, rezultă că

$$[x + k] = p + k = [x] + k.$$

6¹) Identitatea lui Hermite: $[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$,

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$

Observație: pentru $n = 1$, egalitatea este evidentă: $[x] = [x], \forall x \in \mathbb{R}$

Pentru $n = 2$, identitatea lui Hermite devine:

$$[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x], \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

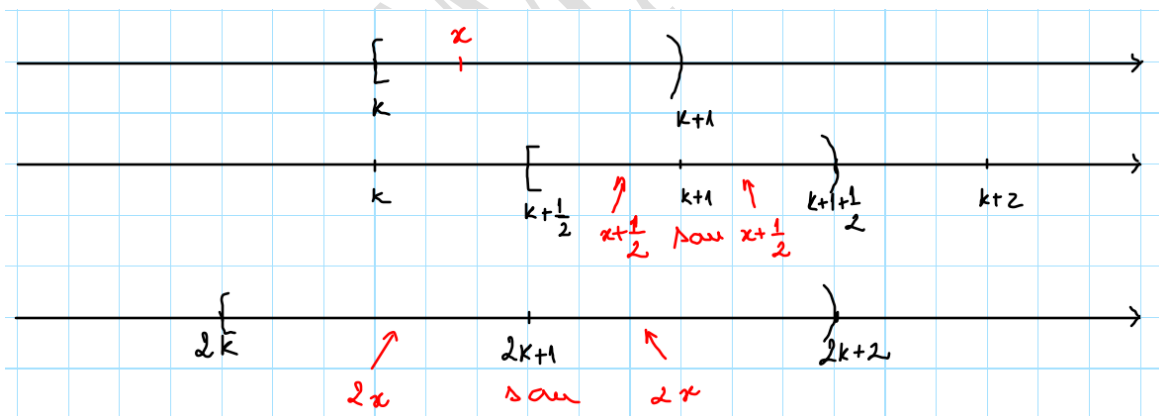
Demonstrația: Fie $x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $k \leq x < k + 1$.

Adunând $\frac{1}{2}$ în cei trei membri ai inegalității de mai sus, obținem

$$k + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < k + 1 + \frac{1}{2} \text{ cu reprezentarea geometrică de mai jos.}$$

Înmulțind aceeași inegalitate cu 2, obținem $2k \leq 2x < 2k + 2$, cu reprezentarea geometrică de mai jos.

De remarcat este faptul că nu putem spune clar ce parte întreagă au numerele $x + \frac{1}{2}$ și $2x$, ele nemaifiind încadrate între două numere întregi consecutive.



Vom considera două situații:

1). $2x \in [2k, 2k + 1)$ ceea ce înseamnă $x \in [k, k + \frac{1}{2})$, deci $x + \frac{1}{2} \in [k + \frac{1}{2}, k + 1)$ de unde deducem $[x + \frac{1}{2}] = k$ și $[2x] = 2k$.

¹ Se regăsește în secțiunea "Pentru curioși și pasionați, dincolo de granițele programei școlare".

Deci, $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = k + k = 2k = [2x]$.

2). $2x \in [2k + 1, 2k + 2)$, ceea ce înseamnă $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right)$, deci

$x + \frac{1}{2} \in \left[k + 1, k + 1 + \frac{1}{2}\right)$ de unde deducem $\left[x + \frac{1}{2}\right] = k + 1$ și $[2x] = 2k + 1$.

Deci, $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = k + k + 1 = 2k + 1 = [2x]$

Cele două cazuri încheie demonstrația identității lui Hermite pentru $n = 2$.

Exemplul 3:

Rezolvați, în \mathbb{R} , ecuațiile :

a) $\left[\frac{3x+1}{10}\right] = -2$	b) $\left[\frac{1+x}{3}\right] = \frac{2x+1}{5}$	c) $\left[\frac{1+2x}{3}\right] = \left[\frac{3x+1}{7}\right]$
--	--	--

a) Ecuația se bazează pe definiția părții întregi. Dacă numărul $\frac{3x+1}{10}$ are partea întreagă -2 , înseamnă că el va fi cuprins între -2 și -1 : $-2 \leq \frac{3x+1}{10} < -1 \Leftrightarrow -20 \leq 3x + 1 < -10 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{21}{3}, -\frac{11}{3}\right)$, soluția fiind un interval.

b) La această ecuație NU putem aplica aceeași metodă de la cazul anterior, dat fiind că membrul drept depinde de variabilă și va fi obligat să fie număr întreg, deci satisface o condiție suplimentară.

Vom nota valoarea comună a celor două expresii cu k , deci $\left[\frac{1+x}{3}\right] = \frac{2x+1}{5} = k$. Cum partea întreagă a unui număr real este număr întreg, rezultă $k \in \mathbb{Z}$. Avem, așadar, două egalități care sunt satisfăcute simultan:

$\begin{cases} \left[\frac{1+x}{3}\right] = k \\ \frac{2x+1}{5} = k \end{cases}$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Din a doua egalitate deducem (1) $x = \frac{5k-1}{2} \in \mathbb{Q}$, deci x nu mai

parcure un interval, ca în cazul anterior.

Pe de altă parte, din prima egalitate, deducem că $k \leq \frac{1+x}{3} < k+1 \Leftrightarrow 3k \leq 1+x < 3k+3 \Leftrightarrow 3k-1 \leq x < 3k+2$. Înlocuind pe x , din (1), obținem $3k-1 \leq \frac{5k-1}{2} < 3k+2 \Leftrightarrow 6k-2 \leq 5k-1 < 6k+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 6k-2 \leq 5k-1 \\ 5k-1 < 6k+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 1 \\ k > -5 \end{cases} \Rightarrow k \in (-5, 1] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$.

Pentru fiecare valoare a lui k se calculează, în (1) valoarea corespunzătoare a lui x .

Așadar, $x \in \left\{-\frac{21}{2}, -8, -\frac{11}{2}, -3, -\frac{1}{2}, 2\right\}$.

c) Notăm, ca și în exemplul anterior, valoarea comună a celor două părți întregi:

$$\left[\frac{1+2x}{3}\right] = \left[\frac{3x+1}{7}\right] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{1+2x}{3}\right] = k \\ \left[\frac{3x+1}{7}\right] = k \end{cases} \text{ de unde } \begin{cases} k \leq \frac{1+2x}{3} < k+1 \\ k \leq \frac{3x+1}{7} < k+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k \leq 1+2x < 3k+3 \\ 7k \leq 3x+1 < 7k+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9k \geq -3-6x > -9k-9 \\ 14k \leq 6x+2 < 14k+14 \end{cases}$$

Atenție! Nu putem aduna inegalități de sensuri diferite! Prima inegalitate se scrie în ordine inversă, apoi se adună inegalitățile de același sens.

$$\begin{cases} -9k-9 < -3-6x \leq -9k \\ 14k \leq 6x+2 < 14k+14 \end{cases}$$

Adunând cele două duble inecuații, obținem $5k-9 < -1 < 5k+14$ și rezolvând cele două inecuații, obținem $k \in (-3, \frac{8}{5}) \cap \mathbb{Z}$, deci $k \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

Avem, însă, de rezolvat patru sisteme: I) $\begin{cases} \left[\frac{1+2x}{3}\right] = -2 \\ \left[\frac{3x+1}{4}\right] = -2 \end{cases}$; II) $\begin{cases} \left[\frac{1+2x}{3}\right] = -1 \\ \left[\frac{3x+1}{4}\right] = -1 \end{cases}$

$$\text{III) } \begin{cases} \left[\frac{1+2x}{3}\right] = 0 \\ \left[\frac{3x+1}{4}\right] = 0 \end{cases}; \text{ IV) } \begin{cases} \left[\frac{1+2x}{3}\right] = 1 \\ \left[\frac{3x+1}{4}\right] = 1 \end{cases}$$

$$\text{I) } \begin{cases} \left[\frac{1+2x}{3}\right] = -2 \\ \left[\frac{3x+1}{4}\right] = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 1+2x < -3 \\ -12 \leq 3x+1 < -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{7}{2}, -2\right) \\ x \in \left[-\frac{13}{3}, -\frac{8}{3}\right) \end{cases} \text{ de unde, intersectând cele}$$

două intervale, obținem $S_I = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{8}{3}\right)$

$$\text{II) } \begin{cases} \left\lfloor \frac{1+2x}{3} \right\rfloor = -1 \\ \left\lfloor \frac{3x+1}{4} \right\rfloor = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 1+2x < 0 \\ -7 \leq 3x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \\ x \in \left[-\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases} \text{ de unde, intersecțând cele două}$$

intervale, obținem $S_{II} = \left[-2, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{III) } \begin{cases} \left\lfloor \frac{1+2x}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor \frac{3x+1}{4} \right\rfloor = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1+2x < 3 \\ 0 \leq 3x+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right) \\ x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases} \text{ de unde, intersecțând cele două}$$

intervale, obținem $S_{III} = \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$

$$\text{IV) } \begin{cases} \left\lfloor \frac{1+2x}{3} \right\rfloor = 1 \\ \left\lfloor \frac{3x+1}{4} \right\rfloor = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 1+2x < 6 \\ 4 \leq 3x+1 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[1, \frac{5}{2}\right) \\ x \in \left[1, \frac{7}{3}\right) \end{cases} \text{ de unde, intersecțând cele două}$$

intervale, obținem $S_{IV} = \left[1, \frac{7}{3}\right)$

Soluția finală va fi $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} \cup S_{IV} = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{8}{3}\right) \cup \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left[1, \frac{7}{3}\right)$, deci

$$S = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{8}{3}\right) \cup \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Partea fracționară a unui număr real

Definiție:

Fie $x \in \mathbb{R}$. Se numește partea fracționară a numărului x numărul real $\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x]$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă a numărului x .

Observație: $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$. (orice număr real este suma dintre partea lui întregă și partea lui fracționară).

Exemplul 4:

Calculați părțile fracționare ale numerelor: $-\frac{7}{3}$; $-\sqrt{2}$; $-0,4$; $\frac{3}{2}$; π ; $\sqrt{n^2 + n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Observație: părțile întregi ale acestor numere au fost calculate în exemplul 1.

$$\left\{-\frac{7}{3}\right\} = -\frac{7}{3} - \left[-\frac{7}{3}\right] = -\frac{7}{3} - (-3) = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}$$

$$\{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$$

$$\{-0,4\} = -0,4 - [-0,4] = -0,4 - (-1) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\{\pi\} = \pi - [\pi] = \pi - 3$$

$$\{\sqrt{n^2 + n}\} = \sqrt{n^2 + n} - [\sqrt{n^2 + n}] = \sqrt{n^2 + n} - n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Proprietăți ale părții fracționare

- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$. (numerele întregi au partea fracționară nulă)
- $\{x\} \in [0, 1)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (partea fracționară a oricărui număr real este număr pozitiv, subunitar)
- $\{x + k\} = \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație:

$$1. \{x\} = 0 \Leftrightarrow x - [x] = 0 \Leftrightarrow x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \{x\} = x - [x] \text{ conform definiției părții fracționare a unui număr real.}$$

Dar $[x] \leq x < [x] + 1$ oricare $x \in \mathbb{R}$, conform definiției părții întregi a unui număr real. Scăzând $[x]$ din cei trei membri ai inegalității, obținem:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Leftrightarrow \{x\} \in [0, 1) \text{ oricare ar fi } x \text{ real.}$$

3. Fie x un număr real oarecare și k un număr întreg.

$$\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x + k - [x] - k = x - [x] \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}.$$

Am folosit proprietatea 5) din secțiunea părții întregi a unui număr real, care relevă faptul că, dacă un număr întreg este adunat cu un număr real în interiorul părții întregi, atunci numărul întreg iese în afara părții întregi.