Unitatea de învățare	Mulțimea numerelor reale: modulul unui număr real

Videoclip: Demonstrarea inegalității triunghiului.

Ce învățăm din videoclip?

- **să interpretăm** definiția modulului unui număr real, pentru a deduce diverse proprietăți
- **să utilizăm algoritmi** pentru optimizarea calculelor cu numere reale
- **să redactăm rezolvarea unei probleme** corelând limbajul uzual cu cel al teoriei mulțimilor

Una dintre proprietățile importante ale modulului este inegalitatea triunghiului care exprimă faptul că modulul sumei a două numere este mai mic sau egal decât suma modulelor lor, oricare ar fi numerele t și u reale. Egalitatea are loc dacă și numai dacă unul dintre numere este zero sau numerele au același semn.

Pornim cu observația simplă: atunci când un număr, de exemplu t, are valoarea zero, atunci membrul stâng al inegalității rămâne $|u|$. Membrul drept al inegalității rămâne tot $|u|$, ceea ce înseamnă că cele două cantități sunt egale, pentru oricare număr real u. Deci inegalitatea triunghiului este adevărată. Analog, dacă u este zero, membrul stâng al inegalității rămâne $|t|$, membrul drept tot $|t|$, din nou are loc egalitatea.

Să vedem dacă, pentru două numere reale nenule, inegalitatea se păstrează. Vom considera t și u reale nenule.

Dacă t și u sunt reale nenule, modulele lor sunt numere strict pozitive. Vom reprezenta pe axă modulul numărului t, strict pozitiv, deci se reprezintă pe partea dreaptă a originii și $-|t|$, care este strict negativ și se va reprezenta pe partea stângă a originii.

Când t este strict mai mare ca zero, el se va așeza pe axă în punctul de abscisă $|t|$, deci putem scrie $t = |t|$. Când t este strict negativ, atunci numărul se va așeza pe axă în punctul de abscisă $-|t|$, așadar putem scrie $t = -|t|$. Dat fiind că în oricare dintre cele două situații, t se confundă fie cu $|t|$ sau cu $-|t|$, putem scrie inegalitatea $-|t| \leq t \leq |t|$, ținând cont de faptul că numărul din mijloc se așează într-unul din termenii din extreme. Inegalitatea este satisfăcută pentru orice număr real, așadar și pentru numărul real u putem scrie o inegalitate similară. Însumând aceste inegalități care sunt de același sens, obținem $-(|t| + |u|) \leq t + u \leq |t| + |u|$.

Remarcăm faptul că termenii din extreme sunt numere de forma $a > 0$ și $-a$, ceea ce înseamnă că $t + u$, care este cuprins între $-a$ și a, va avea modulul mai mic sau egal cu $a = |t| + |u|$.

Am demonstrat inegalitatea triunghiului, valabilă și atunci când numerele sunt zero și atunci când sunt diferite de zero, deci are loc pentru oricare două numere reale.

Considerăm acum afirmația : ”Egalitatea are loc dacă și numai dacă unul dintre numere este zero sau numerele au același semn”.

Afirmația se rescrie: $|t + u| = |t| + |u|$ dacă și numai dacă $u = 0$ sau $t = 0$ sau t și u au același semn.

”$u = 0\ sau\ t = 0$” este o afirmație care se poate transcrie: $u \cdot t = 0$, pentru că produsul este 0 dacă cel puțin unul dintre factori este 0.

Afirmația ” t și u au același semn”, în condițiile în care niciunul nu este 0, fiindcă lui 0 nu-i atribuim niciun semn, se transcrie, conform regulii semnelor, produsul $t \cdot u$ este strict pozitiv ($tu > 0$).

Citind aceste afirmații transformate, deducem că egalitatea noastră are loc dacă și numai dacă $t \cdot u \geq 0$. Am transformat problema noastră într-o problemă mai simplă.

Avem de demonstrat că $|t + u| = |t| + |u|$ dacă și numai dacă $t \cdot u \geq 0$.

Pornim din partea stângă a afirmației noastre $|t + u| = |t| + |u|$. Cei doi membri ai egalității sunt numere pozitive, deci această egalitate este echivalentă cu $|t + u|^2 = (|t| + |u|)^2$.

Să continuăm relația la care am ajuns. Ea va fi echivalentă cu $(t + u)^2 = |t|^2 + 2|t| \cdot |u| + |u|^2$, dat fiind că pătratul modulului este egal cu pătratul numărului din interior. Ținând cont și de faptul că produsul de module este egal cu modulul produsului, obținem:

$$t^2 + 2tu + u^2 = t^2 + 2|tu| + u^2.$$

În această relație pătratele se reduc, iar relația rămasă se poate împărți prin 2. Obținem $|tu| = tu$, doar că, un număr este egal cu modulul lui dacă și numai dacă numărul este mai mare sau egal cu 0.

Am ajuns la concluzia că egalitatea are loc dacă și numai dacă unul dintre cele două numere este 0 sau numerele au același semn.