Unitatea de învățare	Mulțimea numerelor reale: modulul unui număr real

Videoclip: Rezolvarea unei aplicații pe baza definiției modulului și a explicitării acestuia.

Ce învățăm din videoclip?

- **să recunoaștem** situații în care se utilizează modulul unui număr real
- **să utilizăm algoritmi** pentru optimizarea calculelor cu numere reale
- **să redactăm rezolvarea unei probleme** corelând limbajul uzual cu cel al teoriei mulțimilor

Vom exersa, în aplicația următoare, explicitarea modulului.

Demonstrați că numărul $N = \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ este număr natural.

Bun! Dar unde este modulul? Deocamdată, nu apare în enunțul problemei, dar asta nu înseamnă că nu-l vom întâlni pe parcurs. Ne reamintim ce înseamnă explicitarea modulului. Explicitarea modulului este o decizie! Este decizia de a-l înlocui $|x|$ cu x, atunci când acesta este pozitiv, sau cu opusul lui, dacă numărul este negativ.

Mare atenție, că în interiorul modulului poate apărea o expresie cu variabilă, sau pot apărea operații cu numere reale. Va trebui să decidem, din datele de care dispunem, dacă semnul acestei expresii este $+$ sau $-$, pentru a putea lua decizia de înlocuire a modulului cu expresia sau cu opusul ei.

Așadar, când aveți modulul unei expresii de înlocuit, acesta se va înlocui cu expresia, dacă expresia este pozitivă, sau cu opusul ei, dacă expresia este negativă.

Acum să aducem numărul nostru la o formă convenabilă. Nu putem extrage rădăcina pătrată din aceste numere, sub o formă convenabilă. Încercăm să aducem expresiile de sub radical la forma unor pătrate.

Primul număr, $5-2\sqrt{6}$, ar fi convenabil dacă ar apărea ca pătratul unui număr real. Încercăm să formăm un binom diferență la pătrat, plecând de la termenul care conține radical și care ar trebui să fie dublul produs, din formula binomului. Formula binomului diferență, la pătrat, este $a^2 - 2ab + b^2$ care se restrânge sub forma $(a-b)^2$.

Vom avea $5-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{2\cdot 3}$, l-am scris pe 6 ca produs, iar pe 5 îl scriem ca sumă de două numere convenabile, care să reprezinte pătratul lui a, respectiv al lui b (termenii binomului). Dat fiind că sub radical avem factorii 2 și 3, iar pătratul lui $\sqrt{2}$ este 2, pătratul lui $\sqrt{3}$ este 3, îl scriem pe 5 = 2+3. Pe 2 îl scriem $(\sqrt{2})^2$, pe 3 îl scriem $(\sqrt{3})^2$. Am pus în evidență formula binomului diferență la pătrat, deci numărul de sub primul radical se poate scrie $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$.

Procedăm în același mod cu celelalte două numere:

$7-4\sqrt{3}=3+4-4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2-4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-2\right)^2$,

și $3+2\sqrt{2}=1+2+2\sqrt{2}=1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

Pentru că, la ultimul număr, termenul care conține radical are semnul plus, ne gândim la binomul sumă la pătrat, a cărui formă este $a^2+2ab+b^2$ și se restrânge $(a+b)^2$. Așadar $2ab=2\sqrt{2}$, deci $a=1$ și $b=\sqrt{2}$.

Acum revenim la numărul nostru, înlocuind aceste expresii sub radicalii mari. Vom avea:

$$N=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$$

Atenție că radicalul din pătratul unui număr real nu este totdeauna egal cu numărul respectiv, ci $\sqrt{a^2}=|a|$.

După aplicarea acestei proprietăți, numărul N se transformă într-o sumă de 3 module. Vom avea:

$$N=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|1+\sqrt{2}\right|$$

A venit vremea să luăm decizia dacă modulele se vor înlocui cu numerele din interior, sau cu opusele lor. Așadar, trebuie să stabilim semnele acestor numere.

Cum $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$, conform explicitării de mai sus, modulul lui va fi opusul numărului din interior, adică $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

Numărul $\sqrt{3}-2$ este tot un număr strict negativ, deci modulul lui va fi opusul numărului din interior, adică $\left|\sqrt{3}-2\right|=-(\sqrt{3}-2)$.

Numărul $1+\sqrt{2}$ este strict pozitiv, așadar modulul lui se va înlocui chiar cu numărul din interior.

$|1+\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$

Numărul devine: $N = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-2) + 1 + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 + 1 + \sqrt{2}$.

Termenii care conțin radicali se reduc, deci valoarea numărului N este 3, care este număr natural.