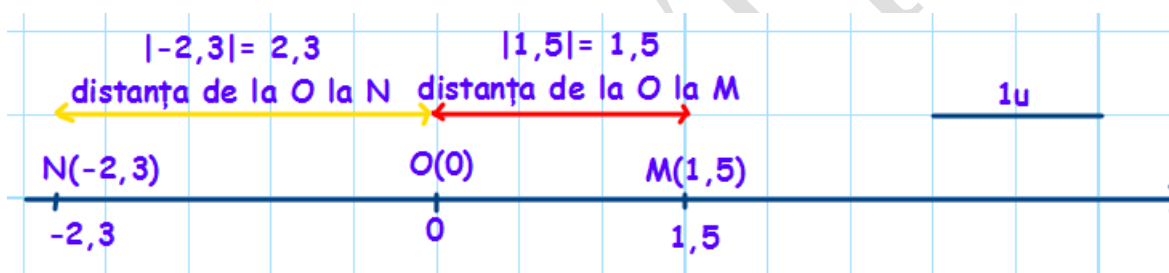
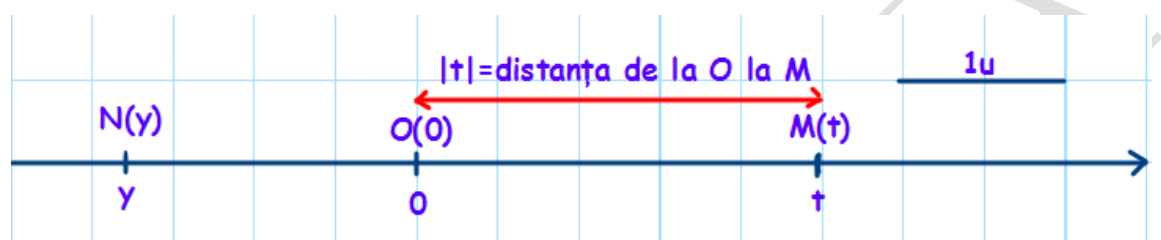


Modulul unui număr real

Definiție: Modulul numărului real t este distanța măsurată de la originea axei numerelor reale până la punctul de pe axă corespunzător abscisei t .

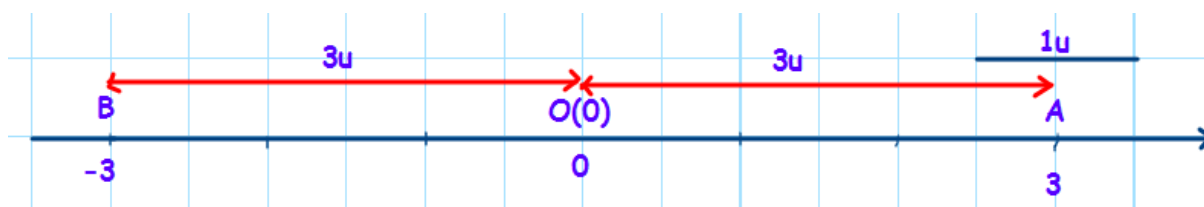


Proprietăți ale modulului unui număr real

- $|t| \geq 0$ pentru orice număr real t (pentru că orice distanță este pozitivă)
- $|t| = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (modulul numărului 0 este distanța de la punctul O la el însuși, adică 0 și nu există un alt număr real care să fie abscisa punctului O)
- $|-t| = |t|$ pentru orice număr real t . (dacă $t = 0$, atunci $-t = 0$ și egalitatea este evidentă; dacă $t \neq 0$, atunci numerele opuse t și $-t$ sunt abscisele unor puncte așezate simetric față de O, deci distanțele de la O la aceste puncte sunt egale).

Observație: Dacă două numere reale au același modul, atunci ele sunt egale sau opuse.

Exemplu: Află valorile posibile ale numărului real x știind că $|2x + 1| = 3$.



Dacă modulul numărului real $2x + 1$ este 3, atunci distanța de la originea axei până la punctul (punctele) de abscisă $2x + 1$ este 3. Am măsurat distanța 3 de la origine către dreapta și către stânga pe axă și am reprezentat punctele A și B. Punctul A este situat la 3 unități de măsură de origine în sens pozitiv, deci are abscisa 3, iar B este situat la 3 unități de măsură de origine în sens negativ, deci are abscisa -3.

$$|2x + 1| = 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3, \\ \text{sau} \\ 2x + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ \text{sau} \\ x = -2 \end{cases}$$

4. $|t \cdot u| = |t| \cdot |u|$, pentru oricare două numere reale t și u (**modulul produsului este egal cu produsul de module**)

5. $\left|\frac{t}{u}\right| = \frac{|t|}{|u|}$, pentru oricare două numere reale t și u , cu $u \neq 0$. (**modulul raportului este egal cu raport de module**)

6. $|t + u| \leq |t| + |u|$, pentru oricare două numere reale t și u (**inegalitatea triunghiului**)

7. $|t - u| \leq |t| + |u|$, pentru oricare două numere reale t și u

8. $||t| - |u|| \leq |t - u|$ pentru oricare două numere reale t și u

9. $||t| - |u|| \leq |t + u|$ pentru oricare două numere reale t și u

Explicitarea modulului unui număr real

Dacă x este un număr real, atunci $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

Dacă $E(x)$ este o expresie care depinde de numărul real x , atunci

$$|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$$

Atenție! Eroarea (frecventă) pe care o fac elevii în explicitarea modulelor de expresii este condiția de pozitivitate/negativitate pe care o pun lui x și nu lui $E(x)$. Nu picați în această eroare!

În general, în ecuațiile, inecuațiile sau problemele care conțin module, acestea se elimină prin explicitare și separarea pe situații/cazuri. Există însă și ecuații sau inecuații în care explicitarea NU este necesară, dat fiind că definiția modulului răspunde direct cerinței.

Exemple de ecuații/inecuații în care NU este necesară explicitarea modulului:

1. $|E(x)| = a$, unde $a < 0$ este o ecuație care **nu are soluție**, pentru că modulul, fiind o distanță, nu poate fi egal cu un număr negativ.

2. $|E(x)| = 0 \Leftrightarrow E(x) = 0$ (un singur număr real are modulul 0, acesta fiind 0) Ecuația obținută nu mai conține modul.

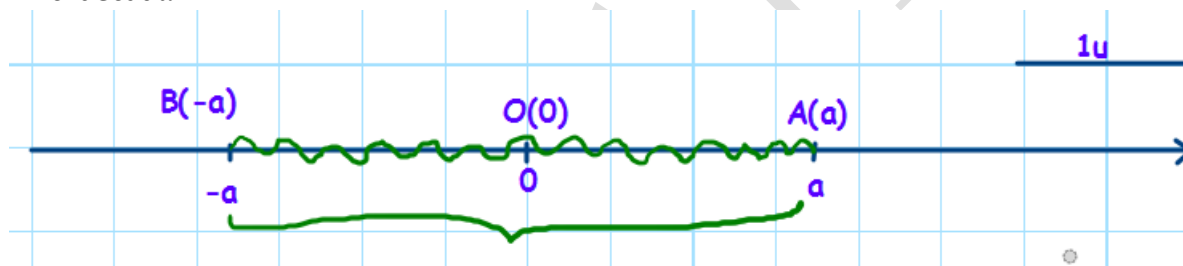
3. $|E(x)| = a$, unde $a > 0 \Leftrightarrow E(x) = \pm a \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) = a, \\ \text{sau} \\ E(x) = -a \end{cases}$. Distanța de la origine până la

un punct de pe axă se obține egală cu a pentru două puncte de pe axă, așezate simetric față de origine și avînd abscisele opuse a și $-a$. Cele două ecuații obținute se rezolvă separat, iar mulțimile de soluții **se reunesc**.

4. $|E(x)| \leq a$ unde $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq E(x) \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) \geq -a \\ \text{și} \\ E(x) \leq a \end{cases}$. Cele două inecuații nu mai

conțin module, se rezolvă separat, apoi se **intersectează** mulțimile de soluții.

Din forma inecuației, înțelegem că distanțele de la origine până la punctele de abscise $E(x)$, pentru diverse valori ale numărului x , sunt mai mici decât numărul a . Căutând astfel de puncte și în stînga și în dreapta originii pe axă, deducem că acestea se plasează la dreapta lui B și la stînga lui A (între B și A), adică au abscise mai mari decât $-a$ și mai mici decât a .



Observație: Dacă inecuația are forma $|E(x)| \leq 0$ (adică $a = 0$), cum modulul este o distanță, deci este totdeauna pozitiv, inecuația se va reduce la $|E(x)| = 0 \Leftrightarrow E(x) = 0$.

Dacă inecuația are forma $|E(x)| \leq a$ și $a < 0$, cum modulul este o distanță, deci este totdeauna pozitiv, inecuația **NU** are soluții.

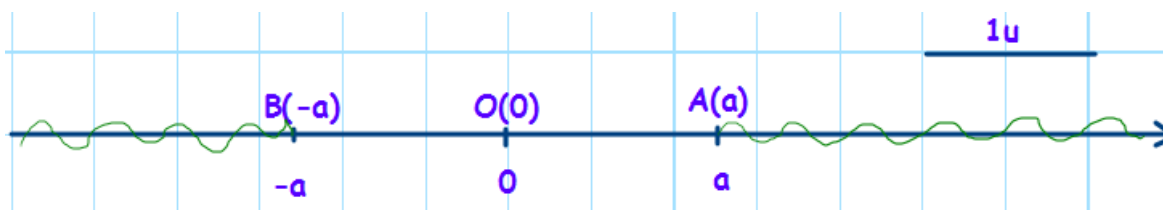
În cazul inegalității stricte : $|E(x)| < a$ unde $a > 0$, acest tip de inegalitate se păstrează

în raționamentul anterior: $|E(x)| < a \Leftrightarrow -a < E(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) > -a \\ \text{și} \\ E(x) < a \end{cases}$. Cele două

inecuații nu mai conțin module, se rezolvă separat, apoi se **intersectează** mulțimile de soluții.

5. $|E(x)| \geq a$ unde $a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) \geq a \\ \text{sau} \\ E(x) \leq -a \end{cases}$. Cele două inecuații nu mai conțin module, se

rezolvă separat, apoi se **reunesc** mulțimile de soluții.



Din forma inecuației, înțelegem că distanțele de la origine până la punctele de abscise $E(x)$, pentru diverse valori ale numărului x , sunt mai mari decât numărul a . Căutând astfel de puncte și în stânga și în dreapta originii pe axă, deducem că acestea se plasează la stânga lui B sau la dreapta lui A adică au abscise mai mici decât $-a$ sau mai mari decât a . (Atenție! Cele două poziționări nu sunt posibile simultan: fie suntem în stânga lui B, fie în dreapta lui A!)

Observație: Dacă inecuația are forma $|E(x)| \geq a$ și $a \leq 0$, cum modulul este o distanță, deci este totdeauna pozitiv, inecuația va fi satisfăcută de toate acele valori ale lui x pentru care expresia $E(x)$ este bine definită.

În cazul inegalității stricte : $|E(x)| > a$ unde $a > 0$, acest tip de inegalitate se păstrează

în raționamentul anterior: $|E(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) < -a \\ \text{sau} \\ E(x) > a \end{cases}$. Cele două inecuații nu mai conțin

module, se rezolvă separat, apoi se reunesc mulțimile de soluții.