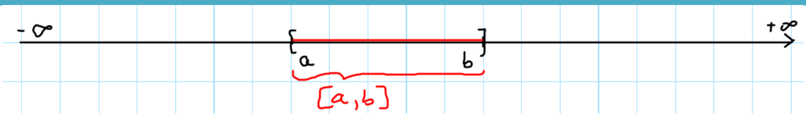
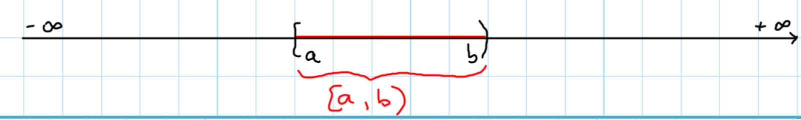
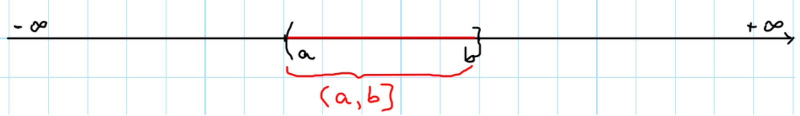
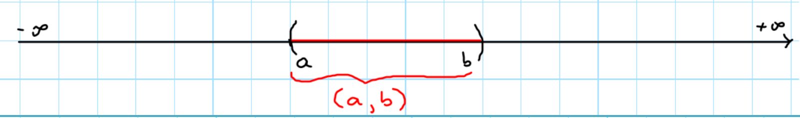
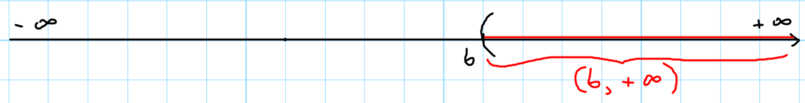
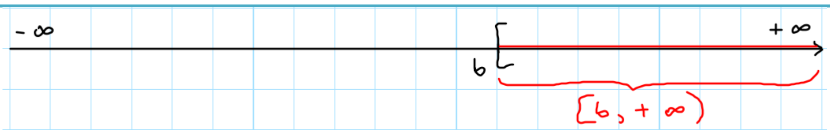
Unitatea de învățare	Mulțimea numerelor reale:operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, aproximări, operații cu intervale

Operații cu intervale

Intervalele de numere reale sunt mulțimi de numere reale descrise prin inegalități. Reprezentarea unui interval, pe axa numerelor reale, poate fi întreaga axa (o dreaptă) sau porțiuni fără întreruperi ale acesteia (semidrepte, segmente de dreaptă).

Pentru descrierea diverselor tipuri de intervale, considerăm $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

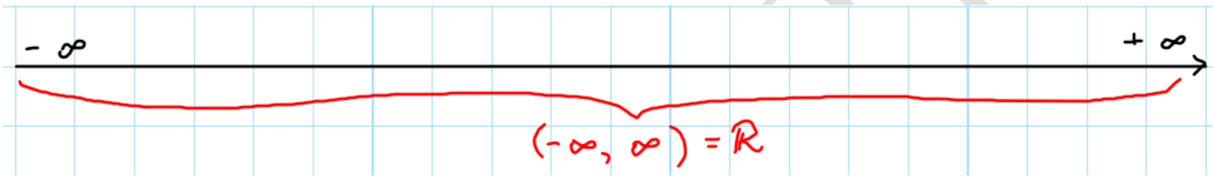
Interval	Reprezentarea pe axă
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Interval închis și mărginit (compact)	
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ Interval mărginit, închis la stânga și deschis la dreapta	
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ Interval mărginit, deschis la stînga și închis la dreapta	
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ Interval deschis și mărginit	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ Interval deschis, nemărginit la stânga, mărginit la dreapta	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ Interval închis și mărginit la dreapta, nemărginit la stânga	
$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}$ Interval deschis, mărginit la stânga și nemărginit la dreapta	

$[\boldsymbol{b},+\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\}$ Interval închis și mărginit la stânga, nemărginit la dreapta	

Mulțimea $\mathbb{R}$ se poate scrie ca interval nemărginit, $(-\infty, +\infty)$ și se reprezintă prin întreaga axă a numerelor reale.

Atenție! Nu utilizăm paranteze drepte pentru capete infinite ale unui interval.

$\pm\infty$ nu sunt numere reale, ci doar simboluri care induc ideea de numere reale foarte mari ($+\infty$) sau foarte mici ($-\infty$).



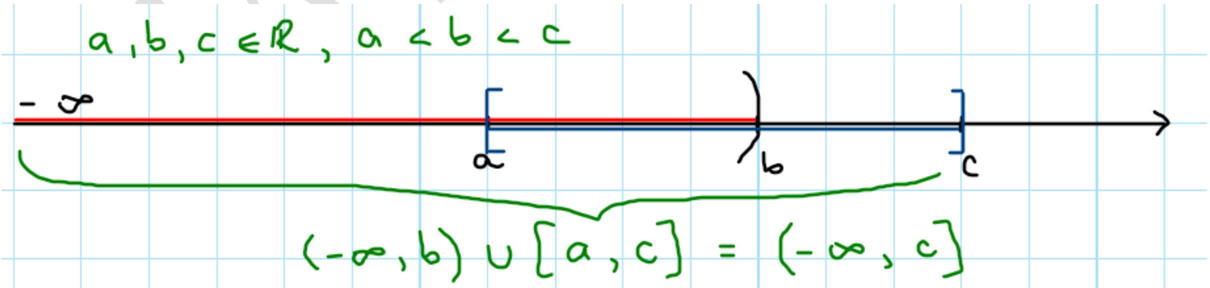
Operațiile cu intervale sunt operațiile specifice mulțimilor:

1. Reuniunea intervalelor:

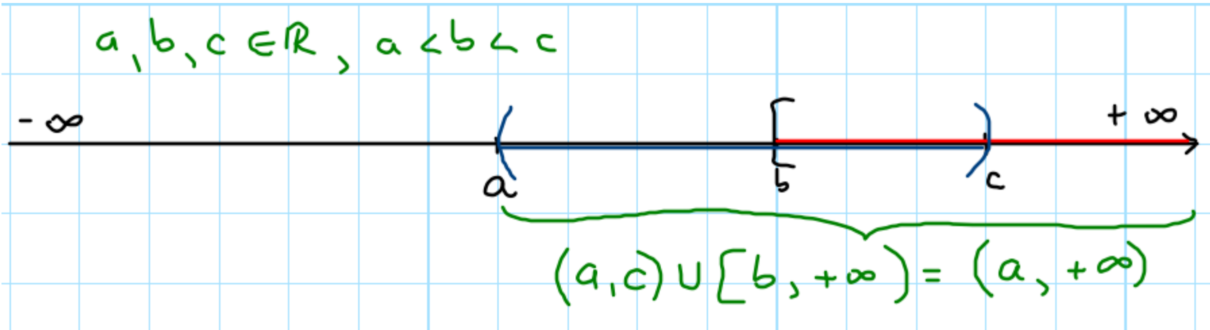
Dacă I_1 și I_2 sunt două intervale de numere reale, atunci

$$I_1 \cup I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ } sau \text{ } x \in I_2\}$$

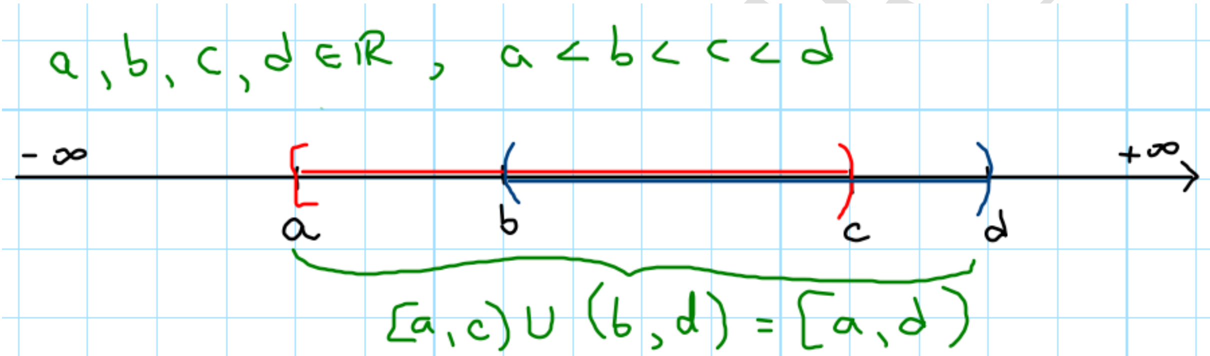
Exemplul 1:



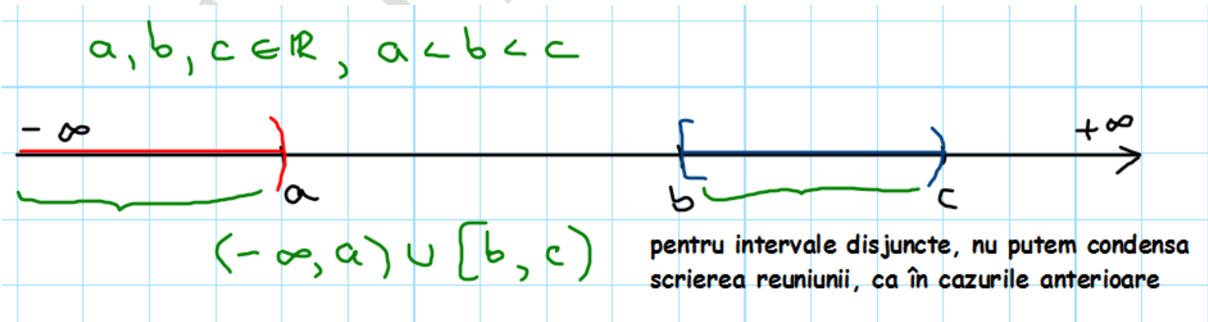
Exemplul 2:



Exemplul 3:



Exemplul 4:

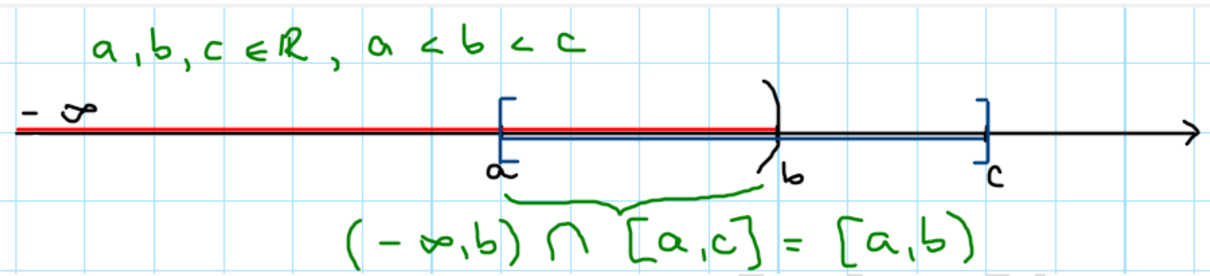


2. Intersecția intervalelor:

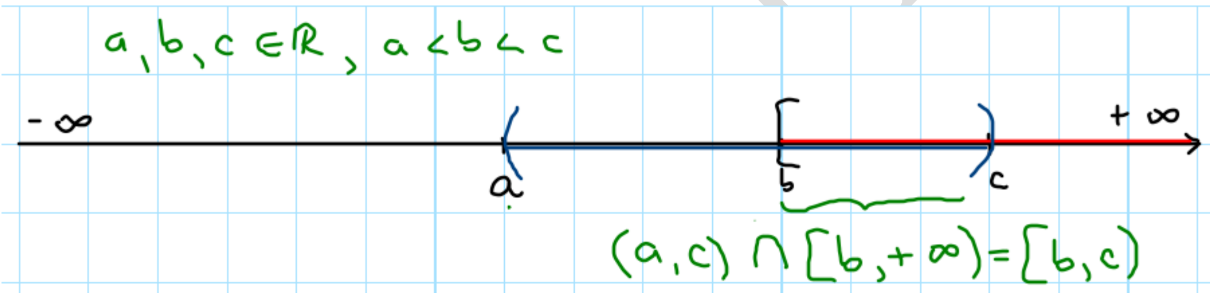
Dacă I_1 și I_2 sunt două intervale de numere reale, atunci

$$I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_1 \ \text{și} \ x \in I_2\}.$$

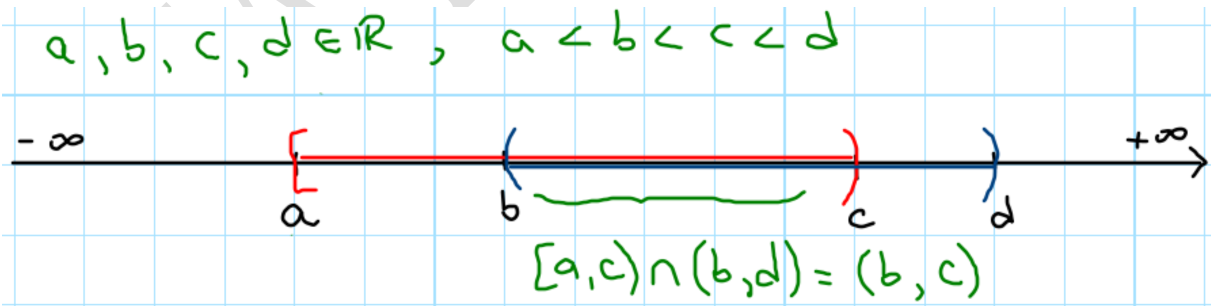
Exemplul 5:



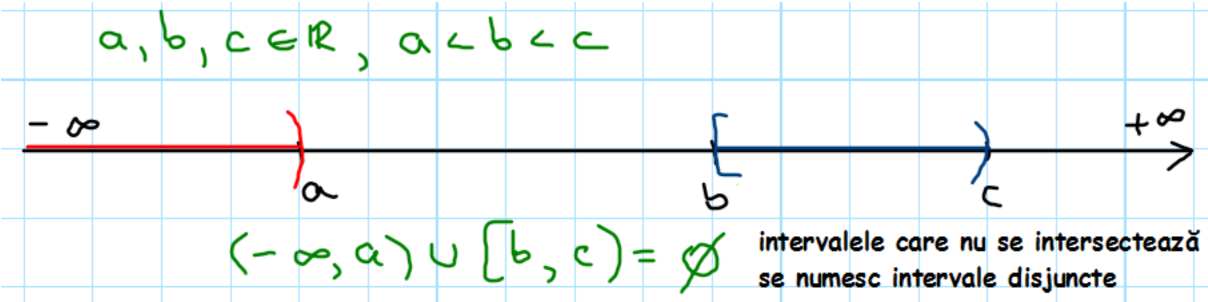
Exemplul 6:



Exemplul 7:



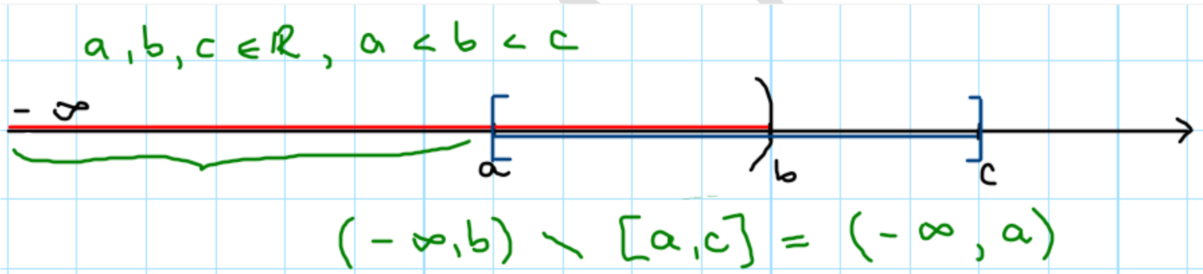
Exemplul 8:



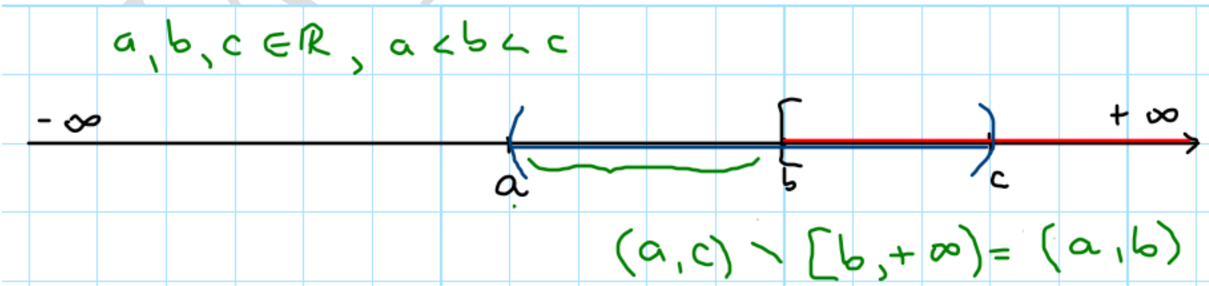
3. Diferența intervalelor:

Dacă I_1 și I_2 sunt două intervale de numere reale, atunci $I_1 \setminus I_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_1 \text{ și } x \notin I_2\}$.

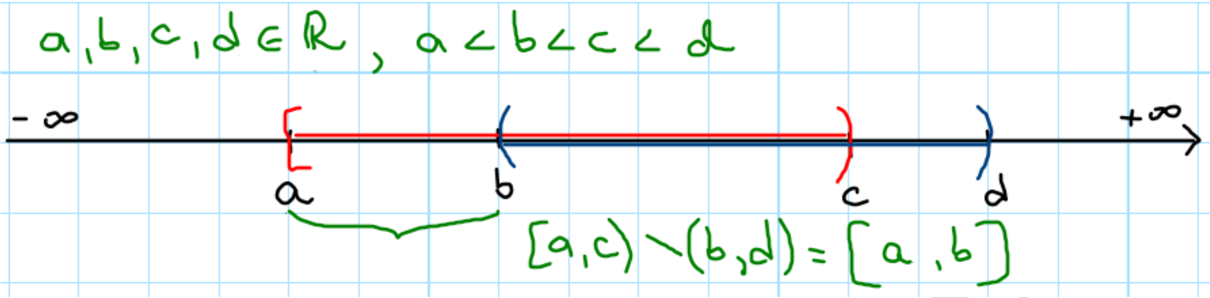
Exemplul 9:



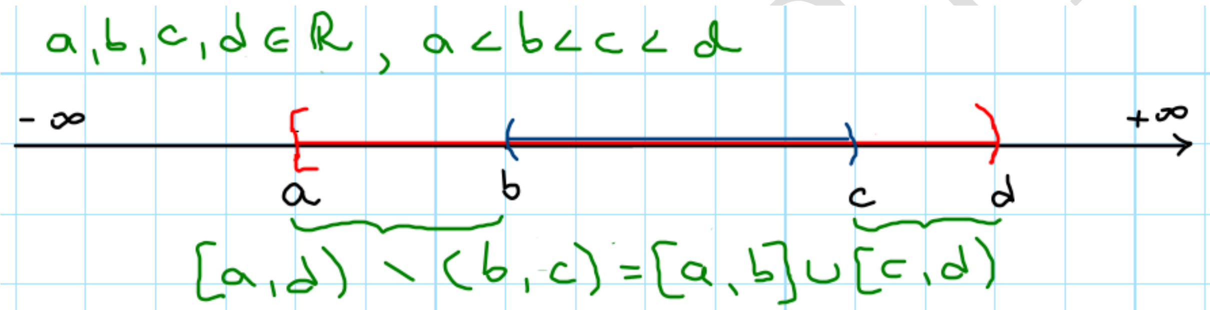
Exemplul 10:



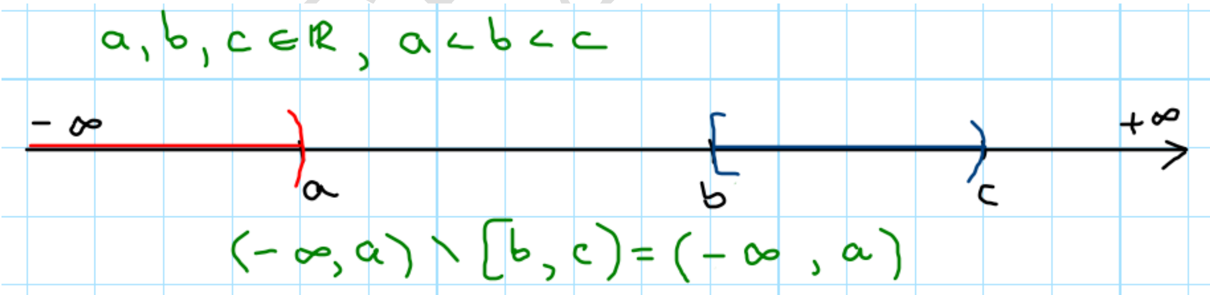
Exemplul 11:



Exemplul 12:



Exemplul 13:

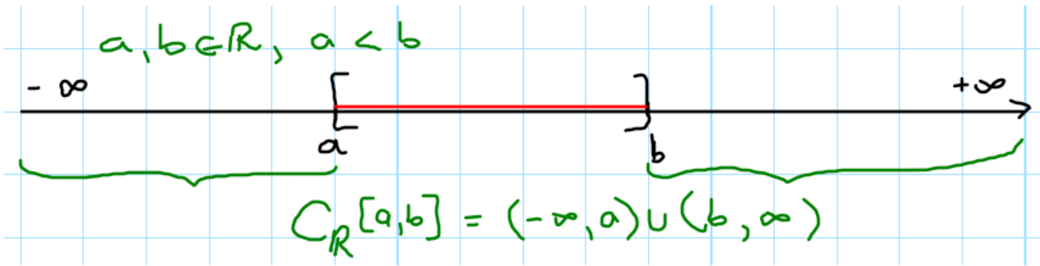


Complementara unui interval

$$C_{\mathbb{R}} I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus I$$

Complementara unui interval I se mai notează $\bar{I}$, deci $C_{\mathbb{R}} I = \bar{I}$

Exemplu:



Proprietăți ale operațiilor cu intervale:

1. Reuniunea și intersecția sunt **asociative**:

$$(I \cup J) \cup K = I \cup (J \cup K), \forall I, J, K \text{ intervale de numere reale}$$

$$(I \cap J) \cap K = I \cap (J \cap K), \forall I, J, K \text{ intervale de numere reale}$$

2. Reuniunea și intersecția sunt **comutative**:

$$I \cup J = J \cup I, \forall I, J \text{ intervale de numere reale}$$

$$I \cap J = J \cap I, \forall I, J \text{ intervale de numere reale}$$

3. Reuniunea și intersecția au **elemente neutre**:

Elementul neutru la reuniunea intervalelor este mulțimea vidă ($\emptyset$):

$$I \cup \emptyset = \emptyset \cup I = I, \forall I \text{ interval de numere reale}$$

Elementul neutru la intersecția intervalelor este mulțimea numerelor reale ($\mathbb{R}$):

$$I \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap I = I, \forall I \text{ interval de numere reale}$$

4. **Reuniunea este distributivă față de intersecție**:

$$I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap (I \cup K), \forall I, J, K \text{ intervale de numere reale}$$

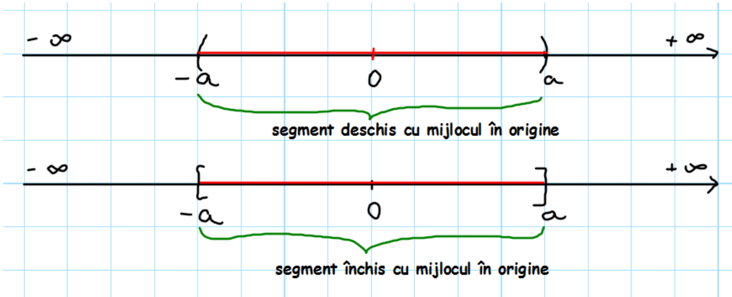
5. **Intersecția este distributivă față de reuniune:**

$$I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (I \cap K), \forall I, J, K \text{ intervale de numere reale}$$

Intervale simetrice

Un interval de numere reale (I) se numește interval simetric, dacă $\forall x \in I \Rightarrow -x \in I$.

Dacă $a > 0$, atunci intervalele $(-a, a)$ și $[-a, a]$ sunt intervale simetrice. Reprezentarea unui astfel de interval pe axa numerelor reale este un segment al cărui mijloc este chiar originea axei (O).



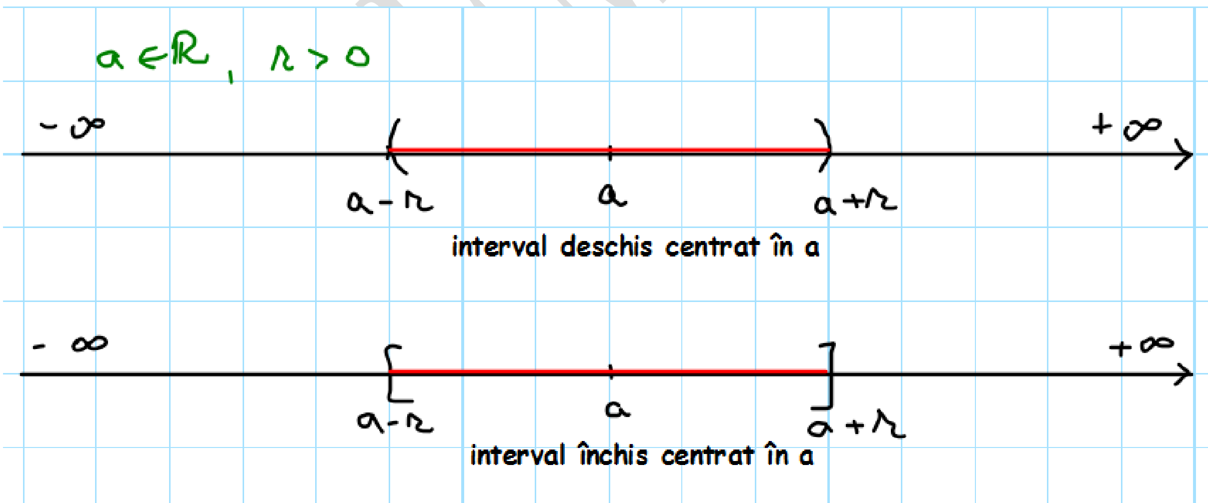
De reținut! $\mathbb{R} =$
$(-\infty, +\infty)$ este interval simetric.

Intervale centrate într-un număr real

Un interval de numere reale (I) se numește centrat în $a \in \mathbb{R}$, dacă o dată cu elementul $a + \varepsilon$ ($\varepsilon \geq 0$) acesta conține și elementul $a - \varepsilon$.

Intervalele centrate în a sunt de forma $(a - r, a + r)$ sau $[a - r, a + r]$ cu $r > 0$.

Observație: Intervalele simetrice sunt intervale centrate în 0.



Atenție! Intervalul (2,4] NU este un interval centrat în 3! Intervalul conține elementul 3+1=4, dar nu conține elementul 3-1=2, deci nu satisface definiția.