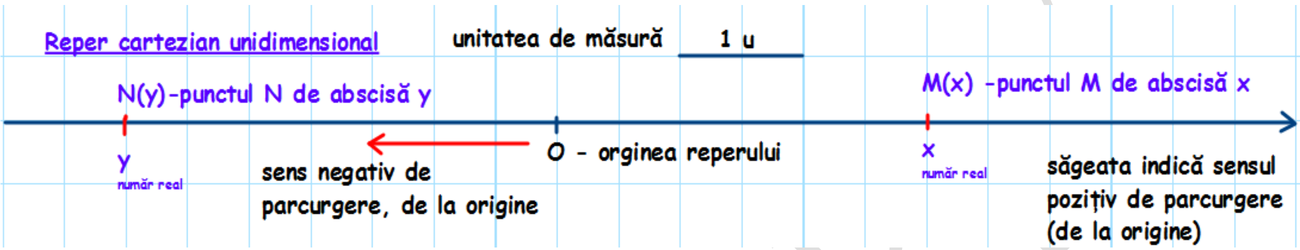
Unitatea de învățare	**Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, aproximări, operații cu intervale**

Operații cu numere reale

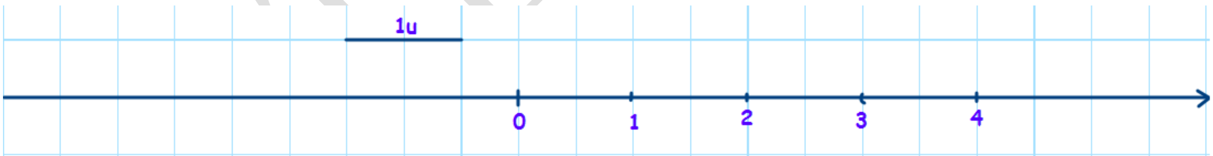
Reper cartezian unidimensional = o dreaptă cu un sens pozitiv de parcurgere, împreună cu un punct fixat numit origine (notat în general cu O) și cu o unitate de măsură.



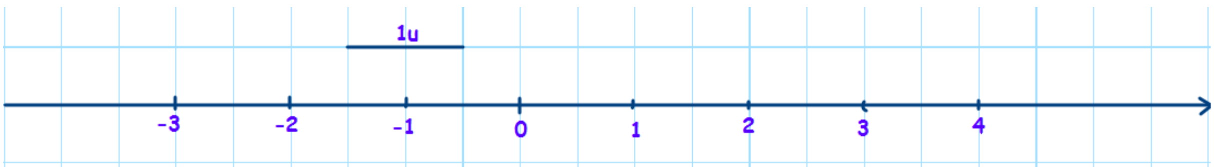
Fiecărui punct de pe dreaptă îi corespunde un număr real, numit abscisa punctului și fiecărui număr real i se poate asocia, în mod unic, un punct pe dreaptă.

Mulțimile de numere cunoscute

$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\} -$ **mulțimea numerelor naturale** se reprezintă pe axă atribuind originii abscisa 0, celelalte numere așezându-se, în ordinea enumerării (crescătoare), în dreapta originii, din unitate în unitate.



$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} -$ **mulțimea numerelor întregi** conține toate numerele naturale și opusele acestora. Se reprezintă pe axă, pornind de la origine spre dreapta pentru numerele naturale în ordine crescătoare din unitate în unitate și pornind de la origine spre stânga pentru întregii negativi în ordine descrescătoare, din unitate în unitate.



$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}\right\}$ –**mulțimea numerelor raționale** conține toate numerele care se pot scrie ca fracție ordinară. În scriere zecimală acestea sunt numerele cu un număr finit de cifre după virgulă, sau cu un număr infinit de zecimale care se repetă de la un punct încolo, după o anumită regulă (*periodic*) - fracții zecimale periodice sau periodice mixte.

De reținut! Orice număr întreg a se poate scrie ca fracție ordinară, sub forma $\frac{a}{1}$. Deci orice număr întreg este număr rațional.

Reprezentarea numerelor raționale pe axă se bazează pe scoaterea întregilor din fracție și pe diviziunea unei unități de măsură într-un număr dat (egal cu numitorul fracției) de părți egale.

Exemplu: $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$ (un întreg și 5 șesimi de unitate). De la origine măsor o unitate, apoi împart a doua unitate în 6 părți egale. Voi număra, pornind de la 1, cinci părți ale diviziunii și reprezint pe axă punctul corespunzător abscisei 11/6.

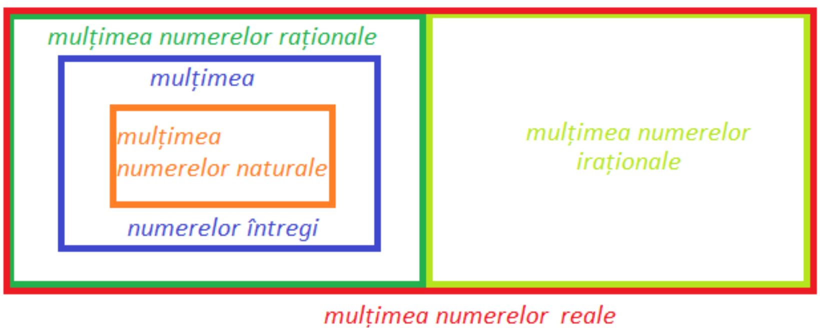
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ – **mulțimea numerelor iraționale** conține toate numerele care nu pot fi scrise ca fracție ordinară, adică fracțiile zecimale cu o infinitate de cifre după virgulă, care nu se repetă periodic.

$\mathbb{R}$ – **mulțimea numerelor reale** conține atât numerele raționale cât și pe cele iraționale.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$

$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$



Operații algebrice cu numere reale

Adunarea: asociază fiecărei perechi de numere reale (x, y) suma lor $x + y$ care este număr real.

Atenție!

- **Operația de adunare se definește pentru DOUĂ numere.**
- **Exprimarea ”Calculați suma elementelor mulțimi A” este incorectă dacă mulțimea A are un singur element!**

- **Când însumăm diverse mărimi, acestea trebuie să aibă aceeași unitate de măsură! De exemplu, NU adunăm numere corespunzătoare unor mărimi exprimate în centimetri cu altele corespunzătoare unor mărimi exprimate în metri! Mai întâi facem transformările pentru a avea aceeași unitate de măsură.**

Proprietăți ale operației de adunare

1. Adunarea numerelor reale este COMUTATIVĂ: $\boldsymbol{x + y = y + x}$, oricare ar fi numerele reale x și y. (*schimbarea ordinii termenilor unei sume nu modifică rezultatul sumei*)

2. Adunarea numerelor reale este ASOCIATIVĂ: $\boldsymbol{(x + y) + z = x + (y + z)}$, oricare ar fi numerele reale x, y și z. (*putem asocia termeni într-o sumă de cel puțin trei termeni, modul de asociere nu modifică rezultatul sumei*)

3. Adunarea are ELEMENT NEUTRU numărul 0: $\boldsymbol{x + 0 = 0 + x = x}$, oricare ar fi numărul real x. (*numărul 0 adunat cu orice număr real conduce la o sumă egală cu acesta din urmă*)

4. Orice număr real x are un OPUS $(-x)$: $\boldsymbol{x + (-x) = (-x) + x = 0}$ (*numerele reale opuse se reprezintă pe axă la egală distanță de origine, în stânga și în dreapta acesteia*)

Înmulțirea: asociază fiecărei perechi de numere reale (x, y) produsul lor $x \cdot y$ care este un număr real.

Atenție!

- **Operația de înmulțire se definește pentru DOUĂ numere.**
- **Exprimarea ”Calculați produsul elementelor mulțimi A” este incorectă dacă mulțimea A are un singur element!**

Proprietăți ale operației de înmulțire

1. Înmulțirea numerelor reale este COMUTATIVĂ: $\boldsymbol{x \cdot y = y \cdot x}$, oricare ar fi numerele reale x și y. (*schimbarea ordinii termenilor unui produs nu modifică rezultatul produsului*)

2. Înmulțirea numerelor reale este ASOCIATIVĂ: $\boldsymbol{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)}$, oricare ar fi numerele reale x, y și z. (*putem asocia factori într-un produs de cel puțin trei numere, modul de asociere nu modifică rezultatul produsului*)

3. Înmulțirea are ELEMENT NEUTRU numărul 1: $\boldsymbol{x \cdot 1 = 1 \cdot x = x}$, oricare ar fi numărul real x.

4. Orice număr real NENUL x are un INVERS $\left(\frac{1}{x}\right)$: $\boldsymbol{x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x = 1}$

5. Înmulțirea este distributivă față de adunare: $\boldsymbol{x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z}$, oricare ar fi numerele reale x, y și z.(*putem elimina paranteza însumând produsele numărului x cu fiecare termen al sumei din paranteză*)

Diferența a două numere reale x și y se notează $x - y$ și reprezintă suma dintre numărul x și opusul numărului y, adică $-y$: $\boldsymbol{x - y = x + (-y)}$

Câtul a două numere reale x și y, cu $y \neq 0$ se notează $\frac{x}{y}$ și reprezintă produsul dintre numărul x și inversul numărului nenul y, adică $\frac{1}{y}$: $\boldsymbol{\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}}$

<u>**Puterea cu exponent întreg a unui număr real**</u>

Dacă p este un număr real și m este un număr **natural**, atunci $p^m = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{de\ m\ ori\ p}$

Convenție: $p^0 = 1$ dacă p este real NENUL.

Atenție! 0^0 este o operație căreia NU i se atribuie sens!

$0^m = 0$ dacă m este număr natural <u>nenul.</u>

$1^m = 1$, pentru orice număr natural m.

$p^1 = p$, pentru orice număr real p

Dacă p este un număr real NENUL și m este un număr natural, atunci $p^{-m} = \frac{1}{p^m}$

$p^{-1} = \frac{1}{p}$ (altă formă a inversului numărului real nenul p)

Reguli de calcul cu puteri (p, q numere reale nenule și m, t numere întregi)

1. $p^m \cdot p^t = p^{m+t}$ (când înmulțim puteri cu aceeași bază, copiem baza și adunăm exponenții)
2. $\frac{p^m}{p^t} = p^{m-t}$ (când împărțim puteri cu aceeași bază, copiem baza și scădem exponenții)
3. $(p^m)^t = p^{mt}$ (când ridicăm o putere la altă putere, copiem baza și înmulțim exponenții)

4. $(p \cdot q)^m = p^m \cdot q^m$ (puterea unui produs este produs de puteri-exponentul se distribuie fiecărui factor din produsul de la bază)

Regula semnelor:

$(+) \cdot (+) = +$

$(+) \cdot (-) = -$

$(-) \cdot (+) = -$

$(-) \cdot (-) = +$

Produsul a două numere cu același semn este un număr pozitiv.

Produsul a două numere cu semne diferite este un număr negativ.

$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ (numărul 0 nu are semn)

Formule algebrice uzuale:

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ⟶pătratul binomului sumă

2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ⟶pătratul binomului diferență

3.$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ ⟶pătratul trinomului

4. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$⟶ descompunerea diferenței de pătrate

5. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$⟶cubul binomului sumă

6. $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$⟶cubul binomului diferență

7. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$⟶descompunerea sumei de cuburi

8. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$⟶descompunerea diferenței de cuburi