MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare: Clase de funcții care admit primitive

Breviar teoretic

Teoremă

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval. Vom spune că funcția $f : J \to \mathbb{R}$ *admite primitive* dacă există o funcție $F : J \to \mathbb{R}$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in J$.

Observație

Conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange, dacă $F_1(x) = F_2(x), \forall x \in J$, adunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in J$.Deducem că o funcție care admite o primitivă va admite o infinitate de primitive.

Definiție

O funcție $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ interval, are proprietatea Darboux dacă pentru orice $a, b \in I, a < b$ și orice γ cuprins între *f(a)* și *f(b)* există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

1. Definiția este echivalentă cu faptul că funcțiile cu proprietatea Darboux transformă orice subinterval al domeniului de definiție intr-un interval.
2. Funcțiile cu proprietatea Darboux nu pot avea discontinuități de speța I.
3. Funcțiile cu proprietatea Darboux nu pot avea puncte în domeniul de definiție în care cel puțin una din limitele laterale în acel punct este infinit sau minus infinit.

Teoremă

Derivata unei funcții derivabile $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ interval , are proprietatea Darboux.

Teoremă

Observație

O funcție $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ interval , care admite primitive are proprietatea Darboux.

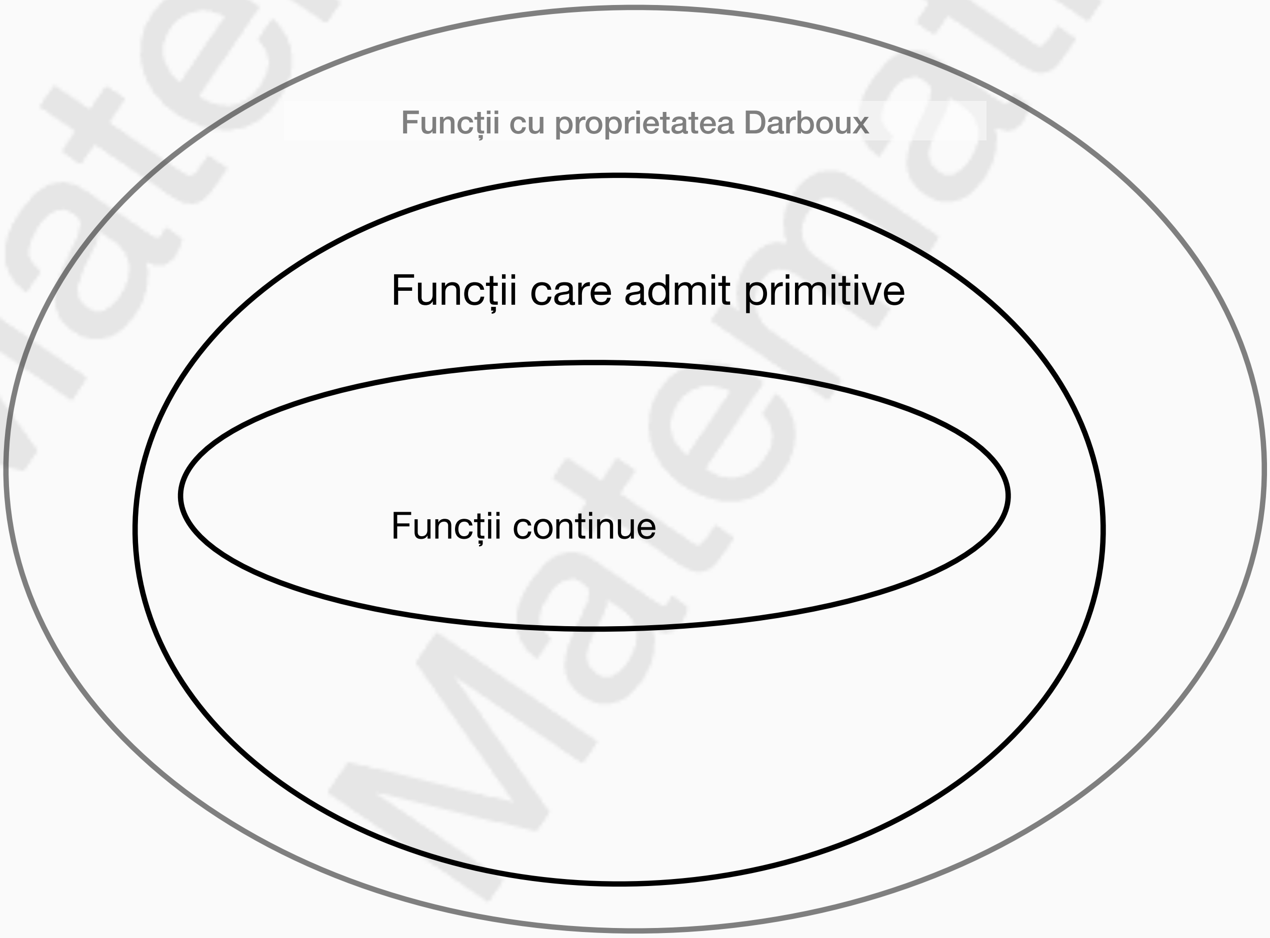
Teoremă

Orice funcție continuă $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ interval , admite primitive.

Consecințe

Fie $J \subset \mathbb{R}$, interval.

1. Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcție astfel încât $f(J)$ nu este interval, atunci funcția f nu admite primitive.
2. Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcție cu discontinuități de speța I, atunci f nu admite primitive.
3. Dacă $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcție care are o limită laterală infinită într-un punct, atunci aceasta nu are proprietatea Darboux, adică funcția nu admite primitive.



Exemple

1) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin^2 x$ admite primitive pentru că este continuă, fiind compunerea a două funcții elementare.

2) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x/2, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$ admite primitive pentru că este continuă.

Într-adevăr, funcție este continuă pe $\mathbb{R}^*$(funcții elementare) , iar în $x_0 = 0$ limitele laterale sunt egale cu 0 și egale cu *f(0)=0,* deci f este continuă și în $x_0 = 0$.

3) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu admite primitive pentru că imaginea funcției este multimea numerelor întregi, aceasta nefiind interval.

4) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$ nu admite primitive pentru că are discontinuitate de speța I în $x_0 = 0$.
Într-adevăr, limita în $x_0 = 0$ la stânga este 0 și este diferită de limita în $x_0 = 0$ la dreapta care este 1.

5) Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ nu admite primitive pentru că limita la dreapta în $x_0 = 0$ este minus infinit, deci f nu are proprietatea **Darboux.**

Pentru a stabili dacă o funcție $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ interval, admite primitive putem proceda astfel:

- studiem continuitatea funcției:

A. dacă funcția este continuă, atunci admite primitive;

B. dacă funcția are discontinuități de speța I, atunci funcția nu admite primitive;

C. dacă funcția are discontinuități de speța a II a cu cel puțin una din limitele laterale infinit sau minus infinit, atunci funcția nu admite primitive;

- dacă imaginea funcției nu este interval, atunci funcția nu admite primitive;dacă funcția nu se regăsește în niciunul din cazurile de mai sus, vom încerca construcția unei funcții care să îndeplinească cele două condiții pentru a fi o primitivă a funcției date.

1. Determinați o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$.

Se observă că funcția admite primitive pentru că este continuă.

O primitivă a funcției va avea forma $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} e^x+k, & x<0 \\ \frac{x^2}{2}+x+c, & x\geq 0 \end{cases}$.

Funcția F este continuă pe $\mathbb{R}^*$.

$\lim\limits_{x\downarrow 0} F(x)=c, \lim\limits_{x\uparrow 0} F(x)=1+k, F(0)=c$ Deducem că $c=1+k$.

O primitivă a funcției va avea forma $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} e^x+k, & x<0 \\ \frac{x^2}{2}+x+1+k, & x\geq 0 \end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

2. Demonstrați că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\{3x\}$ nu admite primitive.

Vom presupune prin absurd că funcția h admite primitive.

$h(x)=\{3x\}=3x-[3x] \longrightarrow 3x-h(x)=[3x]$

Membrul stâng al relației reprezintă o diferență de funcții ce admit primitive, deci membrul drept ar

Știm că imaginea funcției $[3x]$ nu este interval, deci nu poate admite primitive. Contradicție.

Observatii

1. Se poate observa că funcția h are cel puțin un punct de discontinuitate de speța I, deci nu are proprietatea Darboux, așadar nu poate admite primitive.

2. Deși imaginea funcției h este intervalul $[0,1)$, funcția nu are proprietatea Darboux.

3. O modalitate facilă de a arăta că o funcție nu admite primitive este scrierea sa ca sumă sau diferență dintre o funcție care admite și alta care nu admite primitive.

---

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f nu este continuă;

b) Demonstrați că funcția f admite primitive.

a) Fiind rezultatul unor operații cu funcții elementare, funcția este continuă pe $\mathbb{R}^*$.
Vom considera două șiruri de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$și $(y_n)_{n\geq 1}$ având termenii generali
$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, respectiv $y_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, ambele fiind convergente cu limita 0.

$$f(x_n)=2x_n\sin\frac{1}{x_n}-cos\frac{1}{x_n}=\frac{2}{2n\pi}\sin 2n\pi-\cos 2n\pi=-1, \text{ iar}$$

$$f(y_n)=2y_n\sin\frac{1}{y_n}-cos\frac{1}{y_n}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)-\cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\to 0.$$

Deducem că limita funcției f în 0 nu există.
Așadar funcția are o discontinuitate de speța a II-a în 0.

b) Încercăm să construim o funcție $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilă, cu $F'(x)=f(x)$, oricare $x\in\mathbb{R}$.

Plecând de la forma funcției f, vom încerca să deducem funcția F derivând $x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

$$(x^2\sin\frac{1}{x})'=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2(\sin\frac{1}{x})'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

Funcția F trebuie să fie continuă. Cum $\lim_{x\to 0}F(x)=c$, iar $F(0)=\alpha$, pentru continuitatea funcției în 0 trebuie ca $\alpha=c$.
Pe $\mathbb{R}^*$ funcție F este, evident, continuă.

Așadar, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+c, & x\neq 0 \\ c, & x=0 \end{cases}, c,\alpha\in\mathbb{R}.$

Funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, fiind rezultatul unor operații cu funcții derivabile.

Pentru studiul derivabilității în 0 vom calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

Derivabilitatea funcției F este asigurată, dar și $F'(0)=f(0)=0$.

În concluzie, F este funcție derivabilă și $F'(x)=f(x)$, oricare $x\in\mathbb{R}$.

Observăm că funcția *f* admite primitive dar nu este continuă.

Observație

Propietatea unei funcții de a admite primitive este o proprietate globală, prin urmare, primitiva unei funcții de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq a \\ k, & x=a \end{cases}, c\in\mathbb{R}$, g o funcție care admite primitive, va fi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} G(x)+c, & x\neq a \\ G(0)+c, & x=a \end{cases}, c\in\mathbb{R}$, unde $G(x)\in\int g(x)dx$, și **nu** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases} G(x)+c, & x\neq a \\ kx+c_1, & x=a \end{cases}, c,k\in\mathbb{R}$, căreia va trebui sa-i impunem condiția de continuitate, căcă dacă nu este continuă, nu poate fi derivabilă.