MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare:	Primitive

Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită

Definiție

Fie un interval $J \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f : J \to \mathbb{R}$. Vom spune că *f admite primitivă* dacă există o funcție $F : J \to \mathbb{R}$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in J$.
Funcția F se numește *primitivă* a funcției f.

Exemplu

Funcția $F : \mathbb{R} \to [-1,1], F(x) = \sin x$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \cos x$.

Teoremă

Fie un interval $J \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f : J \to \mathbb{R}$. Dacă $F_1, F_2 : J \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in J$.

Observații

Dacă F_0 este o primitivă a funcției $f : J \to \mathbb{R}$, atunci orice funcție de forma $F(x) = F_0(x) + c, \forall x \in J$ va fi o primitivă a funcției f. Deducem că dacă o funcție admite o primitivă, admite o infinitate de primitive, astfel, vom spune în continuare "f admite primitive" în loc de" f admite primitivă".

Definiție

Fie un interval $J \subset \mathbb{R}$ și $f : J \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor ale funcției f se numește *integrala nedefinită a funcției f* și se notează cu $\int f(x)dx$.

Observații

Fie $\mathscr{C} = \{g : J \to \mathbb{R} \,|\, J\, interval, f\, functie\, constanta\}$.

a) $\lambda \cdot \mathscr{C} = \mathscr{C}, \forall \lambda \neq 0$;

b) $\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$;

c) Dacă f admite primitive pe intervalul J, iar F_0 este o primitivă a sa, atunci
$$\int f(x)dx = F_0(x) + \mathscr{C}.$$

Exemple

1. $\int \cos x dx = \sin x + \mathscr{C}$.

2. O primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 + 8x + 6)$ este funcția $F(x) = e^x(x^2 + 6x)$. Prin derivarea funcției f se obține F.

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{z} + \mathscr{C}$.