Exemple de funcții care admit și de funcții care nu admit primitive

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x<0\\ x+1, & x\geq 0\end{cases}$ admite primitive pentru că este continuă.

Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^*$, fiind pe fiecare ramură rezultatul unor operații cu funcții elementare. Cum $\lim_{x\downarrow 0} f(x)=1, \lim_{x\uparrow to} f(x)=1=f(0)$, deducem că f este continuă și în $x_0=0$.

2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x]$ nu admite primitive. Imaginea funcției f este mulțimea $\mathbb{Z}$, aceasta nefiind interval, va rezulta că funcția f nu are proprietatea Darboux, deci nu admite primitive.

3. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{arctgx}{x}, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ nu admite primitive.

Cum $\lim_{x\downarrow 0} f(x)=0=f(0), \lim_{x\uparrow to} f(x)=1$, deducem că f are o discontinuitate de speța I în $x_0=0$, prin urmare, funcția f nu are proprietatea Darboux, deci f nu admite primitive.

4. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ admite primitive și are o discontinuitate de speța aIIa în $x_0=0$.

Funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+c, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}, c\in\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f.