

Construcția unei primitive, verificarea definiției, mulțimea primitivelor

1. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  este continuă, deci funcția  $f$  admite primitive. O primitivă  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$  este  $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \sin x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$ , iar o primitivă a funcției  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x + 1$  este  $H : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, H(x) = \frac{x^2}{2} + x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$ .

O primitivă a funcției  $f$  este  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \sin x + c_1, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + c_2, & x \geq 0 \end{cases}$ , funcție care trebuie să fie

derivabilă și care trebuie să îndeplinească și condiția  $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

Pentru ca funcția  $F$  să fie derivabilă trebuie să fie mai întâi continuă. Funcția  $F$  este continuă pe  $\mathbb{R}^*$ , fiind pe fiecare ramură definită prin funcții elementare, deci continue. Din condiția de continuitate în  $x_0 = 0$  obținem  $(\lim_{x \downarrow 0} F(x) = )c_2 = (\lim_{x \uparrow 0} F(x) = )c_1 = F(0)$ . Primitivele funcției  $f$  vor fi de forma

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \sin x + c, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + c, & x \geq 0 \end{cases}, c \in \mathbb{R}.$$

Observație

În cazul primitivelor care se obțin din funcții continue, derivabilitatea nu trebuie verificată deoarece aceasta rezultă din consecința 4 a teoremei Lagrange studiată în clasa aXIa.

2. Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  este continuă pe  $\mathbb{R}^*$ , fiind rezultatul unor

operații cu funcții elementare, deci continue, iar în  $x_0 = 0$  funcția  $f$  are discontinuitate de speța a IIa.

Pentru că  $(x^2 \cos \frac{1}{x})' = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ , vom putea spune că o primitivă a funcției  $f$  ar putea fi

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} + c_1, & x \neq 0 \\ c_2, & x = 0 \end{cases}. \text{ Funcția } F \text{ este continuă pe } \mathbb{R}^*, \text{ iar din condiția de}$$

continuitate a funcției  $F$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$ , obținem  $c_1 = c_2$ .

Spre deosebire de primul exemplu, pentru primitivei acestei funcții va trebui să-i studiem derivabilitatea și în  $x_0 = 0$ .

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} + c_1 - c_1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0), \text{ ceea ce arată că funcția } F \text{ este derivabilă în } x_0 = 0 \text{ și } F'(0) = f(0).$$