Construcția unei primitive, verificarea definiției, mulțimea primitivelor

1. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ este continuă, deci funcția f admite primitive. O primitivă $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \cos x$ este $G : (0,\infty) \to \mathbb{R}, G(x) = \sin x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$, iar o primitivă a funcției $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = x + 1$ este $H : [0,\infty) \to \mathbb{R}, H(x) = \frac{x^2}{2} + x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

O primitivă a funcției f este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \sin x + c_1, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + c_2, & x \geq 0 \end{cases}$, funcție care trebuie să fie derivabilă și care trebuie să îndeplinească și condiția $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru ca funcția F să fie derivabilă trebuie să fie mai întâi continuă. Funcția F este continuă pe $\mathbb{R}^*$, fiind pe fiecare ramură definită prin funcții elementare, deci continue. Din condiția de continuitate în $x_0 = 0$ obținem $(\lim_{x \downarrow 0} F(x) =)c_2 = (\lim_{x \uparrow 0} F(x) =)c_1 = F(0)$. Primitivele funcției f vor fi de forma

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \sin x + c, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + x + c, & x \geq 0 \end{cases}, c \in \mathbb{R}.$$

Observație

În cazul primitivelor care se obțin din funcții continue, derivabilitatea nu trebuie verificată deoarece aceasta rezultă din consecința 4 a teoremei Lagrange studiată în clasa aXIa.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}^*$, fiind rezultatul unor operații cu funcții elementare, deci continue, iar în $x_0 = 0$ funcția f are discontinuitate de spețа a IIa.

Pentru că $(x^2 \cos \frac{1}{x})' = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$, vom putea spune că o primitivă a funcției f ar putea fi

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} + c_1, & x \in (-\infty,0) \\ c_2, & x = 0 \\ x^2 \cos \frac{1}{x} + c_3, & x \in (0,\infty) \end{cases}$. Funcția F este continuă pe $\mathbb{R}^*$, iar din condiția de continuitate a funcției F, $\lim_{x \downarrow 0} F(x) = c_3 = \lim_{x \uparrow 0} F(x) = c_1 = F(0) = c_2$, obținem $c_1 = c_2 = c$.

Spre deosebire de primul exemplu, pentru primitivei aceastei funcții va trebui să-i studiem derivabilitatea și în $x_0 = 0$.

$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} + c_1 - c_1}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, ceea ce arată că funcția F este derivabilă în $x_0 = 0$ și $F'(0) = f(0)$.