Unitatea de învățare	Șiruri: mulțimi de numere reale; șiruri monotone, șiruri mărginite

Videoclip: Șiruri monotone; șiruri mărginite.

Ce învățăm din videoclip:

- **să deducem** proprietăți de monotonie și de mărginire ale unor șiruri de numere reale pe baza definițiilor și a relației de ordine pe $\mathbb{R}$;
- **să analizăm și să interpretăm** proprietăți de monotonie și de mărginire ale unor șiruri de numere reale;
- **să identificăm** tehnici de lucru pentru optimizarea calculelor.

1. Să studiem monotonia și mărginirea șirului

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

În cazul acesta vom compara doi termeni consecutivi oarecare. Vom transforma termenul general amplificându-l cu conjugata algebrică a expresiei, respectiv cu $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

$$a_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

Cum $\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$ și $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, rezultă că $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, deci

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Am dedus că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un șir strict descrescător.
Cum șirul descrescător este mărginit superior de primul său termen, rezultă că

$$a_n \le a_1 = \sqrt{2}-1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dar $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit inferior de 0.

$$a_n \in (0, \sqrt{2}-1], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

În concluzie, șirul este mărginit.

2. Să studiem monotonia și mărginirea șirului

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, b_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru verificarea monotoniei, vom calcula diferența a doi termeni consecutivi oarecare:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} -$$

$$-\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Deducem că șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător. Cum orice șir crescător este mărginit inferior de primul său termen, deducem că

$$b_n \geq b_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Verificăm dacă există margine superioară a acestui șir. Pentru o comparare optimă cu un alt număr real, aducem termenul general al șirului la o formă mai simplă, amplificând fiecare fracție cu conjugata algebrică a numitorului. Obținem:

$$b_n = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \cdots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-n-1}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1-\sqrt{n+1}}{-1} = \sqrt{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculând câțiva termeni ai șirului, intuim că aceștia cresc fără a avea o margine superioară, dar intuiția noastră nu este suficientă. Vom demonstra, prin metoda reducerii la absurd, că șirul este nemărginit superior.

Presupunem că șirul este mărginit superior, deci

$$\exists M > 0, \text{ astfel încât } b_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \leq M + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow n + 1 \leq (M+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow n \leq (M+1)^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dacă ultima relație ar fi adevărată, ar însemna că mulțimea numerelor naturale nenule ar fi mărginită superior, sau ar fi finită, ceea ce este fals. Așadar, presupunerea este falsă, deci șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit superior.

3. Să verificăm monotonia și mărginirea șirului

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ cu } y_1 = 2 \text{ și } y_{n+1} = \frac{n}{n+1}y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vom demonstra, prin inducție matematică, faptul că toți termenii acestui șir sunt pozitivi, deci $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Este o demonstrație simplă, dar necesară pentru a putea verifica monotonia șirului folosind raportul a doi termeni consecutivi, comparat cu 1.

Verificarea o vom face pentru $n = 1$: $y_1 = 2 > 0$ - adevărată.

Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, presupunem $P(k) : y_k > 0$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1) : y_{k+1} > 0$ este adevărată.

Din relația de recurență, $y_{k+1} = \frac{k}{k+1}y_k$. Cum $k \in \mathbb{N}^*$, iar $y_k > 0$, rezultă că $y_{k+1} > 0$, deci $P(k+1)$ este adevărată, iar conform principiului inducției matematice, rezultă că $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cu această condiție îndeplinită, putem studia monotonia șirului folosind raportul a doi termeni consecutivi generali, comparat cu 1. Folosind relația de recurență, putem scrie:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De aici rezultă cu șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Va fi, deci, mărginit superior de primul său termen, $y_1 = 2$. Dar am demonstrat că $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde deducem

$$y_n \in (0, 2], \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

deci șirul este mărginit.