

Breviar teoretic

Înainte de parcurgerea acestui breviar teoretic, este necesară parcurgerea noțiunilor studiate în clasa a IX-a, referitoare la progresiile aritmetice și la progresiile geometrice, care sunt șiruri particulare de numere reale.

Definiție:

Se numește șir de numere reale o funcție

$$f : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

unde  $k$  este un număr natural fixat și  $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ .

Notăm:  $f(n) = a_n$ , iar șirul cu  $(a_n)_{n \geq k}$ ;  $a_n$  se numește termenul general al șirului.

Pentru șirurile definite pe  $\mathbb{N}^*$ , adică  $(a_n)_{n \geq 1}$ , spunem că  $a_n$  este termenul de rang  $n$  al șirului, prin indicele  $n$  înțelegând poziția termenului  $a_n$  în enumerarea termenilor șirului (primul termen, al doilea, ... al  $n$ -lea termen, ...).

Principalele modalități de a defini un șir:

1. Sintetic: prin enumerarea sau descrierea termenilor șirului.

**Exemple:**

- șirul numerelor naturale,
- șirul numerelor prime,
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$
- $1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots$

2. Analitic: prin exprimarea termenului general, printr-o formulă de calcul, sau mai multe.

**Exemple:**

- $(x_n)_{n \geq 1}, x_n = \frac{2n}{n+1}, \forall n \geq 1;$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, y_n = (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Recurent: prin relații de dependență a unui termen al șirului de termeni anteriori.

**Exemple:**

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} = 3x_n + 1, \forall n \geq 0, x_0 = 1.$
- $(y_n)_{n \geq 1}, y_{n+1} = 3y_n - 2y_{n-1}, \forall n \geq 2, y_1 = 0, y_2 = 1$
- $(a_n)_{n \geq 1}, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \forall n \geq 1, a_1 = \sqrt{6}$
- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, b_n = \frac{2b_{n-1}}{1 + b_{n-1}}, \forall n \geq 1, b_0 > 0.$

### Definiție

**Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  se numește:**

- **crescător** dacă  $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \geq 0;$
- **strict crescător** dacă  $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 0;$
- **descrescător** dacă  $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 0;$
- **strict descrescător**  $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 0;$
- **monoton** dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  este crescător sau descrescător;
- **strict monoton** dacă șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  este strict crescător sau strict descrescător.

### Modalități de verificare a monotoniei unui șir:

1. Se calculează diferența a doi termeni consecutivi generali și se compară această diferență cu 0:

$$a_{n+1} - a_n \begin{cases} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{crescător} \\ \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{descrescător} \\ > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{strict crescător} \\ < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{strict descrescător} \end{cases}$$

**Observație:** Dacă diferența  $a_{n+1} - a_n$  nu păstrează același semn pentru toate valorile naturale ale lui  $n$ , atunci șirul nu este monoton.

**Exemplu:**

Pentru șirul  $(a_n)_{n \geq 0}, a_n = (-2)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ , găsim:

$$a_{n+1} - a_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n = (-2)^n (-2 - 1) = -3(-2)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pentru  $n$  par, această diferență este negativă, iar pentru  $n$  impar este pozitivă, ceea ce înseamnă că termenii șirului nu păstrează aceeași ordine între ei, deci șirul NU este monoton.

2. Dacă șirul are termenii strict pozitivi, se calculează raportul a doi termeni consecutivi generali și se compară acest raport cu 1:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{este crescător} \\ \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{este descrescător} \\ > 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{este strict crescător} \\ < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{este strict descrescător} \end{cases}$$

**Observație:** Dacă raportul  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  nu păstrează aceeași poziție față de 1 pentru toate valorile naturale ale lui  $n$ , atunci șirul nu este monoton.

**Exemplu:**

Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n = 2^{(-1)^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  are toți termenii strict pozitivi.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}}}{2^{(-1)^n}} = 2^{(-1)^{n+1} - (-1)^n} = 2^{(-1)^n(-1-1)} = 2^{2 \cdot (-1)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pentru  $n$  par, acest raport este  $\frac{1}{4}$ , deci subunitar, iar pentru  $n$  impar, raportul este 4, deci supraunitar, ceea ce înseamnă că termenii șirului nu păstrează aceeași ordine între ei, deci șirul NU este monoton.

**Observație:** Monotonia unui șir recurent se poate demonstra, uneori, și prin inducție matematică: se compară primii doi termeni ai șirului, apoi se demonstrează că ordinea între oricare doi termeni consecutivi este aceeași cu ordinea între primii doi.

**Aplicații:**

**1) Studiați monotonia șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ ,  $\forall n \geq 1$ .**

Soluție:

$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{3}{(n+3)(n+2)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 1$  deci șirul este strict crescător.

**2) Studiați monotonia șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu**

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \forall n \geq 1.$$

Soluție:

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 1$  deci șirul este strict crescător.

**3) Studiați monotonia șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_n = \frac{2^n}{n!}, \forall n \geq 1$ .**

Soluție:

Avem  $a_n > 0, \forall n \geq 1$  și  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$  deci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este descrescător.

**4) Studiați monotonia șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \forall n \geq 1$ .**

Soluție:

Folosim metoda inducției matematice.

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1.$$

Presupunem prin inducție că  $a_n \leq a_{n-1}$ . Vom demonstra că  $a_{n+1} \leq a_n$ .

$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}} \geq 0 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$  și deci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este crescător.

**Definiție:**

**Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit inferior dacă mulțimea termenilor șirului  $\{a_n | n \geq 0\}$  este mulțime mărginită inferior, adică există  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $m \leq a_n, \forall n \geq 0$ .**

**Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit superior dacă mulțimea termenilor șirului  $\{a_n | n \geq 0\}$  este mulțime mărginită superior, adică există  $M \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a_n \leq M, \forall n \geq 0$ .**

**Un șir  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit dacă mulțimea termenilor șirului  $\{a_n | n \geq 0\}$  este mulțime mărginită, adică există  $m, M \in \mathbb{R}$  astfel încât  $m \leq a_n \leq M, \forall n \geq 0$ .**

Putem folosi și faptul că șirul  $(a_n)_{n \geq 0}$  este mărginit dacă  $\exists M > 0$  astfel încât  $|a_n| \leq M, \forall n \geq 0$ .

**Exemple:**

- Șirul definit sintetic:  $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$  este mărginit, mulțimea termenilor săi fiind  $\{-1, 1\}$ , adică mulțime finită, deci mărginită. Putem scrie:  $-1 \leq a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
- Șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$  este mărginit, toți termenii acestuia fiind cuprinși între 0 și 1:  $0 < x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- Șirul numerelor naturale este mărginit inferior de 0, dar este nemărginit superior.
- Șirul numerele prime este mărginit inferior de 2, dar este nemărginit superior.
- Șirul numerelor întregi negative este nemărginit inferior, dar este mărginit superior de 0.

**Aplicații:**

**1) Studiați mărginirea șirului  $(a_n)_{n \geq 0}$  cu  $a_n = \frac{2n+1}{n+2}, \forall n \geq 1$ .**

Soluție:

Cum  $n \in \mathbb{N}^*$ , rezultă  $\frac{2n+1}{n+2} > 0, \forall n \geq 1$ .

Pe de altă parte,  $a_n = \frac{2n+2-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul este mărginit.

**2) Studiați mărginirea șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu**

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \forall n \geq 1.$$

Soluție: Termenul general al șirului este o sumă de fracții strict pozitive, deci:

$$0 < a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq 1, \forall n \geq 1.$$

De aici, rezultă că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.

**3) Studiați mărginirea șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \forall n \geq 1$ .**

Soluție: Șirul are termeni strict pozitivi. Pentru  $\forall n \geq 1$  putem scrie:

$$0 < a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} \leq 3.$$

Deci  $0 \leq a_n \leq 3, \forall n \geq 1$ , deci șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.

**4) Studiați mărginirea șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \forall n \geq 1$ .**

Soluție: Am demonstrat anterior că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este crescător. Deci,  $\forall n \geq 1$ :

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sqrt{2+a_n} \geq a_n > 0 \Leftrightarrow 2+a_n \geq a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a_n \in [-1, 2] \text{ și } a_n > 0.$$

Deci,  $0 < a_n \leq 2, \forall n \geq 1$ . Așadar, șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este mărginit.