Unitatea de învățare	Șiruri: mulțimi de numere reale; șiruri monotone, șiruri mărginite

Videoclip: Vecinătăți.

Ce învățăm din videoclip:

- **să deducem** proprietăți ale vecinătăților unui număr real pe baza definiției, a relației de ordine pe $\mathbb{R}$ și a operațiilor cu mulțimi;
- **să exersăm utilizarea conceptului** de vecinătate a unui numnăr real;
- **să identificăm** tehnici de lucru pentru optimizarea algoritmilor și a calculelor.

Ne vom opri asupra proprietăților vecinătăților unui număr real. Vom nota ϑ_{x_0} mulțimea tuturor vecinătăților numărului real x_0.

Proprietatea 1:

$$x_0 \in V, \forall V \in \vartheta_{x_0}$$

Spunem că orice vecinătate a unui punct își conține punctul.
Dacă V este o vecinătate oarecare a lui x_0, atunci există un interval, centrat în x_0 care îl conține pe x_0 (este centrul acestui interval) și care este inclus în V. De unde rezultă că $x_0 \in V, \forall V \in \vartheta_{x_0}$.

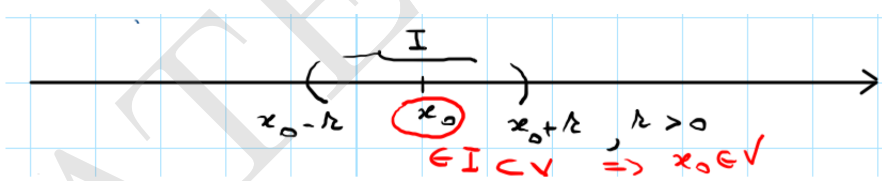

Figura 1: Orice vecinătate a unui număr real x_0 îl conține pe x_0

Proprietatea 2:

$$V_1, V_2 \in \vartheta_{x_0} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \vartheta_{x_0}$$

Dacă V_1 și V_2 sunt vecinătăți pentru același număr real, atunci fiecare dintre aceste mulțimi conține câte un interval centrat în x_0.

Vom avea $I_1 = (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \in V_1, r_1 > 0$ și $I_2 = (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \in V_2, r_2 > 0$. Fără a restrânge generalitatea, am ales $r_1 < r_2$. Dacă r_2 ar fi mai mic decât r_1, intervalele I_1 și I_2 și-ar schimba rolurile între ele.

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA www.matematrix.ro

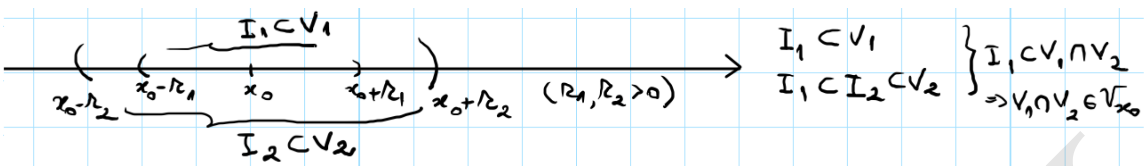

Figura 2: Intersecția a două vecinătăți ale numărului x_0 este tot o vecinătate a lui x_0

Indiferent care număr este mai mare, dintre r_1 sau r_2, unul dintre intervale este conținut în celălalt. Cu alegerea $r_1 < r_2$, deducem că

$$I_1 \subset V_1,$$

$$I_1 \subset I_2 \subset V_2,$$

ceea ce înseamnă că

$$I_1 \subset V_1 \cap V_2$$

Cum I_1 este un interval centrat în x_0 și este conținut în $V_1 \cap V_2$, rezultă că $V_1 \cap V_2$ este vecinătate a lui x_0.

Proprietatea 3:

$$V \in \vartheta_{x_0}, V \subset V' \Rightarrow V' \in \vartheta_{x_0}$$

Vecinătatea V conține un interval centrat în $x_0, I = (x_0 - r, x_0 + r), r > 0$.

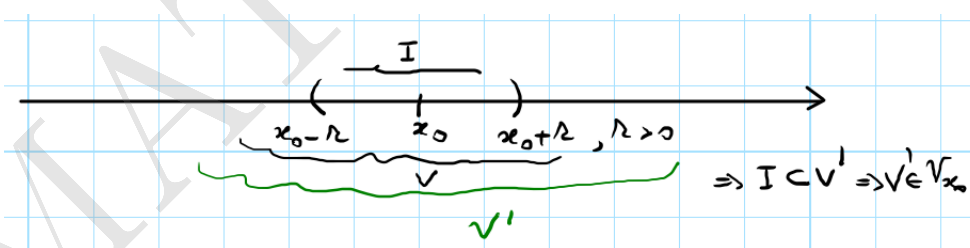

Figura 3: Orice mulțime care conține o vecinătate a numărului real x_0 este tot o vecinătate a lui x_0

Dar cum V este conținută în V', aceasta din urmă conține și ea intervalul I centrat în x_0, deci este și ea vecinătate a lui x_0.

MATEMATRIX

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA www.matematrix.ro

Proprietatea 4:

$$V \in \vartheta_{x_0}, \Rightarrow \exists U \in \vartheta_{x_0}, \text{ astfel încât } V \in \vartheta_y, \forall y \in U$$

Cu alte cuvinte, orice vecinătate a lu x_0 am alege, găsim o vecinătate ”mai mică” a lui x_0.

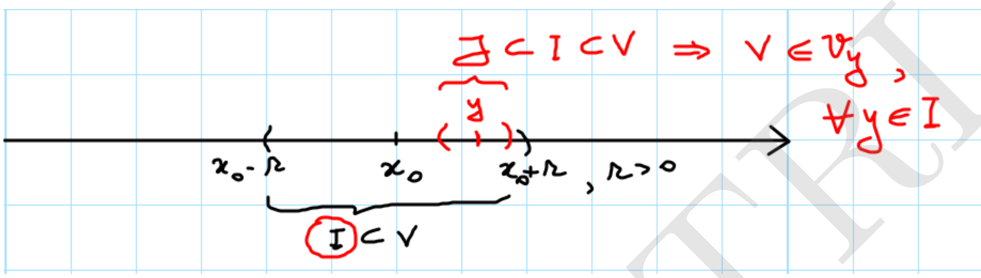

Figura 4: Orice vecinătate a numărului real x_0 conține o vecinătate mai mică a lui x_0

Vecinătatea V conține intervalul $I = (x_0 - r, x_0 + r), r > 0$, centrat în x_0. Vecinătatea U căutată poate fi chiar intervalul I, dat fiind că este o vecinătate a lui x_0 și are proprietatea din enunț. Alegând un element oarecare y al intervalului I și considerând d cea mai mică distanță de la y la capetele intervalului I, interval $J = (y - d, y + d), d > 0$ este centrat în y și conținut în I, deci și în V. Deci I este o vecinătate a lui x_0 așa încât V este vecinătate a fiecărui punct din I.

Proprietatea 5-Teorema de separare:

Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ atunci există vecinătățile $V \in \vartheta_a, U \in \vartheta_b$ astfel încât $V \cap U = \varnothing$.

Fără a restrânge generalitatea, putem considera $a < b$, dat fiind că numerele sunt diferite. Asta înseamnă că intervalul (a, b) este mulțime nevidă.

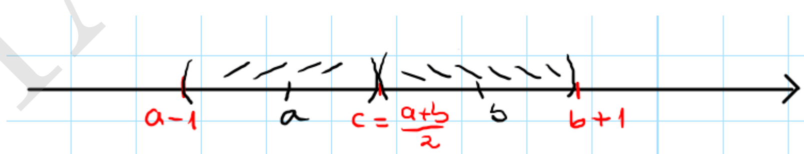

Figura 5: Pentru oricare două numere reale, distincte, există vecinătăți disjuncte

Dacă $c = \frac{a+b}{2}$, atunci c aparține intervalului (a, b) fiind chiar mijlocul acestui interval. Putem construi vecinătățile $V = (a - 1, c) \in \vartheta_a$ și $U = (c, b + 1) \in \vartheta_b$ și $V \cap U = \varnothing$.

Acest material este oferit gratuit de matematrix.ro în conformitate cu CC-BY-SA www.matematrix.ro