

**Unitatea de învățare**

**Șiruri: mulțimi de numere reale; șiruri monotone, șiruri mărginite**

Videoclip: Mulțimi mărginite și nemărginite

Ce învățăm din videoclip:

- o **să identificăm** minoranți și majoranți ai unor mulțimi;
- o **să exersăm utilizarea conceptului** de mulțime mărginită în identificarea unei funcții mărginite.
- o **să identificăm** metode și tehnici de rezolvare a unor probleme referitoare la mulțimi mărginite sau nemărginite

Dacă știm să demonstrăm că o mulțime de numere reale este mărginită sau nemărginită, înseamnă că știm deja să demonstrăm că o funcție este mărginită sau nemărginită, respectiv că un șir este mărginit sau nemărginit.

1. Să demonstrăm că mulțimea  $A = \{\frac{x}{x^2+1} / x \in \mathbb{R}\}$  este o mulțime mărginită. Ce anume urmărim? Ne raportăm la definiția mulțimii mărginite și vom căuta două numere reale între care se află toate elementele mulțimii  $A$ :

**O mulțime  $X \subset \mathbb{R}$  se numește mărginită dacă  $\exists m, M \in \mathbb{R}$  astfel încât  $X \subset [m, M]$**

**(sau  $\exists m, M \in \mathbb{R}$  astfel încât  $m \leq x \leq M, \forall x \in X$ )**

Mulțimea  $A$  este, de fapt, imaginea unei funcții:

$$A = \{f(x) / x \in \mathbb{R}\} \text{ unde } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ este dată prin } f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Așadar, dacă demonstrăm că mulțimea  $A$  este mărginită, vom demonstra că funcția  $f$  este o funcție mărginită.

Căutăm  $y \in \mathbb{R}$  pentru care  $\exists x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $y = \frac{x}{x^2+1}$ .

$$y = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 + y = x \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0$$

Dacă  $y = 0$ , egalitatea devine  $-x = 0$ , deci găsim  $x$  real pentru care egalitatea este adevărată, așadar,  $y = 0$  aparține imaginii funcției  $f$ .

$$y = 0 \in A$$

Dacă  $y \neq 0$ , atunci relația pe care am obținut-o este o ecuație de gradul al doilea în  $x$ . Pentru ca această ecuație să aibă soluții reale, deci să existe  $x$  real pentru care egalitatea să fie adevărată, este necesar ca discriminantul ecuației să fie mai mare sau egal cu zero. Deci,

$$\Delta \geq 0$$

$$\Delta = 1 - 4y^2, \text{ și } 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$$

Punând la un loc toate elementele care aparțin mulțimii  $A$ , vom găsi

$$A = \{0\} \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Mulțimea  $A$  respectă definiția mulțimii mărginite, deci  $A$  este o mulțime mărginită, așadar și funcția  $f$  este o funcție mărginită.

2. Să studiem mărginirea mulțimii  $B = \{ctg x / x \in (0, \pi)\}$ . Mulțimea  $B$  este, de fapt, imaginea funcției  $ctg$  definită doar pe intervalul  $(0, \pi)$ .

Pentru reprezentarea grafică a funcției  $ctg$  am folosit aplicația Geogebra.org

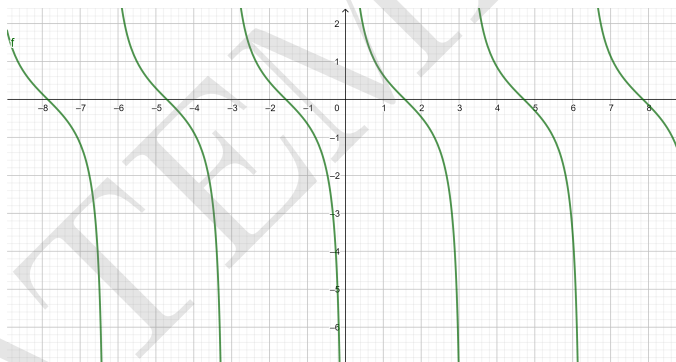


Figura 1: Reprezentarea geometrică a graficului funcției  $ctg$  pe întreg domeniul de definiție

Domeniul maxim de definiție al funcției  $ctg$  este  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ . Dacă păstrăm din acest domeniu doar intervalul  $(0, \pi)$ , atunci aplicația afișează graficul acestei restricții.

Imaginea unei funcții, când știm reprezentarea ei grafică, se identifică proiectând punctele curbei pe axa  $Oy$ . Proiectând punctele curbei noastre pe axa  $Oy$ , remarcăm că aceste proiecții acoperă toată axa  $Oy$ . Deci

$$\text{Im}(ctg) = \mathbb{R}.$$

Revenind la mulțimea noastră, deducem că  $B = \mathbb{R}$  care este o mulțime nemărginită.

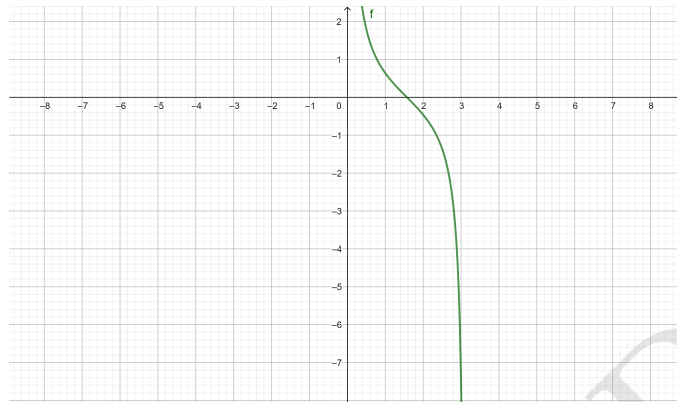


Figura 2: Reprezentarea geometrică a graficului funcției ctg pe  $(0, \pi)$

3. A treia mulțime căreia îi studiem mărginirea este

$$C = \left\{ \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} > 0$$

Am dedus că mulțimea este mărginită inferior de zero, adică 0 este un minorant al mulțimii. Pe de altă parte,

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} \leq \frac{\sqrt{n^2+2n+1}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \leq \frac{n+n+1}{2n+1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Am obținut  $0 < \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , ceea ce înseamnă  $C \subset (0, 1]$ , adică mulțimea  $C$  este mărginită.

4. Un ultim exemplu este mulțimea

$$D = \{2^{(-1)^n} / n \in \mathbb{N}\}.$$

Calculând câteva elemente ale mulțimii, găsim:

$$n = 0 \longrightarrow 1$$

$$n = 1 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \rightarrow 4$$

$$n = 3 \rightarrow \frac{1}{8}$$

$$n = 4 \rightarrow 16$$

...

Dacă  $n$  este natural impar, atunci elementele sunt de forma  $2^{-n} = \frac{1}{2^n} \in (0, 1)$ . Dacă  $n$  este natural par, elementele sunt de forma  $2^n$ , formând o submulțime a mulțimii  $D$ , pe care o notăm

$$D' = \{2^n/n \in \mathbb{N}, n - par\}$$

Mulțimea  $D'$  este o mulțime nemărginită superior și vom demonstra acest lucru, folosind metoda reducerii la absurd.

Presupunând că mulțimea  $D'$  este mărginită superior, înseamnă că

$$\exists M \in \mathbb{R}, 2^n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, n - par$$

$$\Leftrightarrow n \leq \log_2 M, (M > 0) \forall n \in \mathbb{N}, n - par$$

Ultima relație arată că mulțimea numerelor naturale pare este o mulțime mărginită superior, ceea ce este fals. Așadar, presupunerea este falsă, deci  $D'$  este nemărginită superior. Cum  $D'$  este o submulțime a mulțimii  $D$  și este nemărginită superior, rezultă că mulțimea  $D$  este nemărginită superior.