

Capitolul

Limite de funcții

Unitatea de învățare

Șiruri: Mulțimi de numere reale, mulțimi mărginite și nemărginite, șiruri monotone, șiruri mărginite

Breviar teoretic

Înainte de parcurgerea acestui breviar teoretic, este necesară recapitularea noțiunilor legate de mulțimi de numere reale și de intervale, studiate în clasa a IX-a:

- [Operații algebrice cu numere reale](#) (accesați linkul)
- [Relația de ordine pe mulțimea numerelor reale](#) (accesați linkul)
- [Intervale de numere reale](#) (accesați linkul)

1. Mulțimi mărginite

Definiție

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă de numere reale.

- 1) Numărul real m se numește minorant al mulțimii A dacă

$$m \leq x, \forall x \in A.$$

Mulțimea A se numește minorată sau mărginită inferior dacă are cel puțin un minorant.

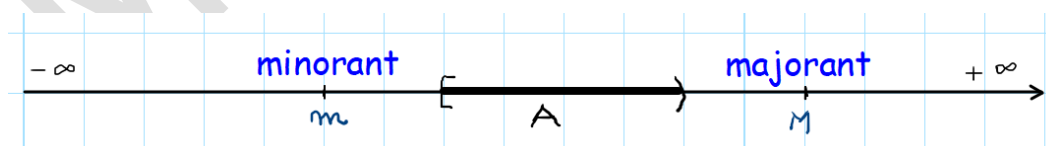
- 2) Numărul real M se numește majorant al mulțimii A dacă

$$x \leq M, \forall x \in A.$$

Mulțimea A se numește majorată sau mărginită superior dacă are cel puțin un majorant.

- 3) Mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ se numește mărginită dacă este mărginită inferior și superior, adică $\exists m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$A \subset [m, M].$$



Teorema 1:

Mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime mărginită dacă și numai dacă există $M \in (0, +\infty)$ astfel încât $|x| \leq M, \forall x \in A$.

Demonstrație:

Dacă $|x| \leq M, \forall x \in A$ atunci $-M \leq x \leq M, \forall x \in A$ deci $-M$ este un minorant al mulțimii A , iar M este majorant pentru A .

Reciproc, dacă A este mărginită atunci $\exists a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$a \leq x \leq b, \forall x \in A.$$

Alegem $M = \max\{|a|, |b|\}$ și obținem $|x| \leq M, \forall x \in A$.

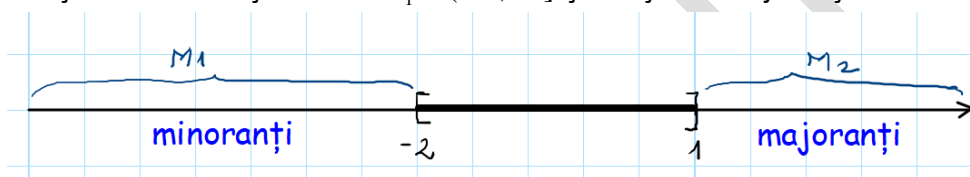
Aplicații:

1) Determinați mulțimea minoranților și mulțimea majoranților pentru mulțimile:

a) $A = [-2, 1]$; b) $A = (-1, 1) \cup [2, 3]$.

Soluție:

a) Mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, -2]$ și mulțimea majoranților este $M_2 = [1, +\infty)$



b) Mulțimea $M_1 = (-\infty, -1]$, iar $M_2 = [3, +\infty)$ este mulțimea majoranților.



2) Demonstrați că mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale este minorată, dar nu este majorată.

Soluție:

Cum $n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că 0 este un minorant al mulțimii \mathbb{N} .

Pentru a arăta că mulțimea \mathbb{N} nu este majorată presupunem, prin absurd, că există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 \leq n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Alegând $n_0 = [M] \in \mathbb{N}$, avem că $M < n_0 + 1$ și $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, deci am găsit un număr natural care NU este mai mic decât M (contradicție).

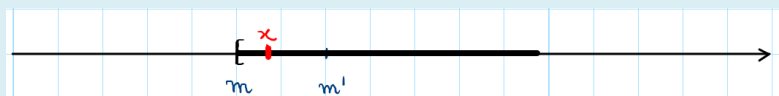
2. Marginile unei mulțimi de numere reale

Definiție:

1) Numărul $m \in \mathbb{R}$ se numește **marginea inferioară a mulțimii** $A \subset \mathbb{R}$ dacă m este cel mai mare minorant al mulțimii, adică:

a) $m \leq x, \forall x \in A$

b) $\forall m' \in \mathbb{R}$ cu $m < m'$, $\exists x \in A$ astfel încât
 $m \leq x < m'$.



Notăm $m = \inf A$ (infimum de A).

2) Numărul $M \in \mathbb{R}$ se numește **marginea superioară a mulțimii** $A \subset \mathbb{R}$ dacă M este cel mai mic majorant al mulțimii, adică:

a) $x \leq M, \forall x \in A$

b) $\forall M' < M, \exists x \in A$ astfel încât

$$M' < x \leq M$$



Notăm $M = \sup A$ (supremum de A).

Exemple:

Dacă $A = [0, 1)$, atunci:

- mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, 0]$ și $\inf A = 0$.

- mulțimea majoranților este $M_2 = [1, +\infty)$ și $\sup A = 1$.

Axioma lui Cantor:

Orice mulțime de numere reale mărginită superior are margine superioară.

De reținut!

- 1) Orice mulțime de numere reale mărginită inferior are margine inferioară.
- 2) Dacă marginile unei mulțimi există atunci acestea sunt unice.

Observație: Submulțimile lui \mathbb{Q} nu-și conțin neapărat marginea superioară.

Exemplu: Fie $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$.

Avem $x \leq 2, \forall x \in A$ și $x \leq 2, \forall x \in B$, deci mulțimile A și B sunt majorate.

$$A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \text{ și } B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset \mathbb{R}.$$

$\sup B = \sqrt{2} \in B$ (mulțimea B conține toate numerele reale cuprinse între $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$).
Dar mulțimea A , deși este majorată de numărul rațional 2, nu admite cel mai mic majorant număr rațional.

Dacă $m = \inf A \in A$ atunci m se numește cel mai mic element al mulțimii A și notăm $m = \min A$.

Dacă $M = \sup A \in A$ atunci M se numește cel mai mare element al mulțimii A și notăm $M = \max A$.

Exemplu:

Dacă $A = [0, 1)$, atunci: $\inf A = \min A = 0$, $\sup A = 1$, $\max A$ nu există.

Pentru o abordare unitară a rezultatelor de analiză matematică folosim simbolurile $+\infty$ (plus infinit) și $-\infty$ (minus infinit). Le numim "numere infinite", dar nu reprezintă numere reale.

Mulțimea $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se numește dreapta încheiată și putem considera că

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nemărginită inferior, vom considera că $\inf A = -\infty$, iar dacă mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nemărginită superior, vom considera că $\sup A = +\infty$.

Exemple:

$$\sup \mathbb{N} = +\infty;$$

$$\inf \mathbb{Z} = -\infty;$$

$$\sup \mathbb{Z} = +\infty;$$

$$\inf \mathbb{Q} = -\infty;$$

$$\sup \mathbb{Q} = +\infty;$$

$$\inf \mathbb{R} = -\infty;$$

$$\sup \mathbb{R} = +\infty.$$

3. Vecinătățile unui punct pe axa reală. Punct de acumulare

Ne reamintim!

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ și $r > 0$ atunci intervalul $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ se numește interval centrat în x_0 .

Definiție:

- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numește vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă există un interval centrat în x_0 , $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ cu $r > 0$, astfel încât $x_0 \in I \subset V$.
- Mulțimea V se numește vecinătate a lui $+\infty$ dacă există un interval deschis $I = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $I \subset V$.
- Mulțimea V se numește vecinătate a lui $-\infty$ dacă există un interval deschis $I = (-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $I \subset V$.

Pentru $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, vom nota cu \mathcal{V}_{x_0} mulțimea vecinătăților lui x_0 .

Exemple:

1. Dacă $x_0 = -1$, atunci:

$V_1 = [-3, 4)$ este vecinătate a lui x_0 pentru că există $I = (-2, 0) \subset V_1$, interval centrat în -1.

$V_2 = [-1, 2]$ **nu este vecinătate** a lui x_0 pentru că nu există niciun interval centrat în -1 care să fie inclus în V_2 .

2. Exemple de vecinătăți pentru $+\infty$: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*, (0, \infty), [-\sqrt{3}, \infty), \{-2, -1\} \cup (0, \infty)$

Mulțimile următoare **NU** sunt vecinătăți pentru $+\infty$, pentru că nu conțin intervale de forma $I = (a, +\infty), a \in \mathbb{R} : \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, (-\infty, 0), [-2, 2]$

3. Exemple de vecinătăți pentru $-\infty$: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*, (-\infty, -\sqrt{5}), (-\infty, 2] \cup \{10\}$

Mulțimile următoare **nu** sunt vecinătăți pentru $-\infty$, pentru că nu conțin intervale de forma $I = (-\infty, a), a \in \mathbb{R} : \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, (-5, 0), [-2, 2], (0, \infty)$.

4. Puncte de acumulare ale unei mulțimi

Definiție:

Numărul $x_0 \in \bar{R}$ se numește **punct de acumulare al mulțimii A** dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ rezultă că:

$$A \cap V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Definiție:

Un număr real $x_0 \in A$ se numește **punct izolat al mulțimii A** dacă nu este punct de acumulare al mulțimii A.

Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' .

Exemple:

1) Dacă $A = (0, 1)$ atunci $A' = [0, 1]$;

2) Dacă $A = \mathbb{N}$ atunci $A' = \{+\infty\}$;

3) Dacă $A = \mathbb{Z}$ atunci $A' = \{-\infty, +\infty\}$;

4) Dacă $A = \mathbb{Q}$ atunci $A' = \bar{\mathbb{R}}$;

5) Dacă $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ cu $a_i \neq a_j, n \in \mathbb{N}^*$ și $A \subset \mathbb{R}$, atunci $A' = \emptyset$ și toate elementele mulțimii sunt puncte izolate.

6) Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci $A' = \bar{\mathbb{R}}$.

7) Dacă $A = \{-2\} \cup [-1, 3)$, atunci $A' = [-1, 3]$ și -2 este punct izolat.