

Capitolul

Limite de funcții

Videoclip: Vecinătăți în viața reală, transpunerea noțiunilor introductive de la limita unei funcții într-un punct, în realitate

Ce învățăm din videoclip:

- o **să identificăm** similaritățile dintre **limbajul matematic** utilizat în definirea limitei unei funcții într-un punct și **limbajul cotidian**;
- o **să exersăm utilizarea conceptelor** și metodelor matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.

Sensul matematic al vecinătății unui punct nu diferă prea mult de sensul pe care îl dă dicționarul acestui cuvânt. Vecinătate înseamnă apropiere spațială imediată.

Considerăm punctul A în care se află un spațiu de birouri- blocul A, din cartierul X, pe care îl considerăm zona blocului A. În descrierea amplasamentului blocului A apar și referiri la zona din care face parte. De exemplu: are în vecinătate o fabrică, la 5 minute de mers pe jos, o bibliotecă publică, la 10 minute de mers pe jos, o școală, la 15 minute de mers pe jos și un adăpost pentru animale abandonate, la care nu se poate ajunge pe jos (10 minute de mers pe jos și 10 minute cu ambarcațiuni). Asta pentru că adăpostul se află pe o insulă. Mențiunea "în vecinătate" nu este însoțită de amănunte de felul "în dreapta sau în stânga intrării principale se află fabrica, sau biblioteca". Intuiția noastră percepe fabrica

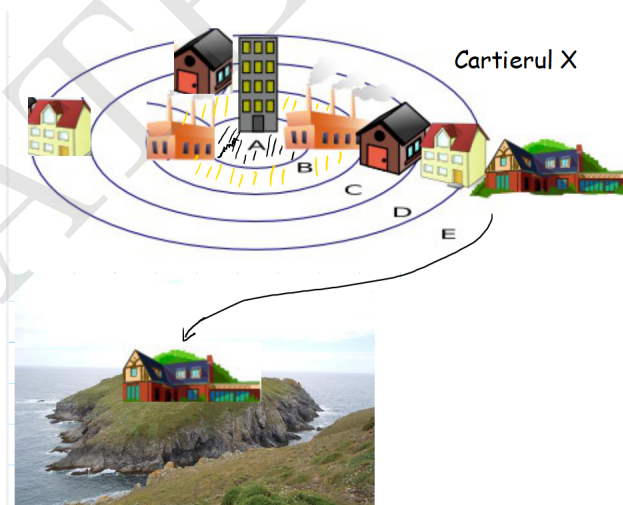


Figura 1: Vecinătăți ale blocului A

unde va fi în interiorul unei suprafețe circulare (să zicem) centrată în punctul A. Putem merge pe jos, timp de 5 minute, în orice direcție, pornind din punctul A. Se formează, astfel, o zonă B, zonă în care sigur regăsim fabrica, fără să știm (din aceste date) încotro ar trebui să mergem către fabrică, dar știm că este legată de blocul A printr-un drum pe care îl putem parcurge pe jos.

În același mod, biblioteca o percepem ca fiind așezată într-o zonă circulară, zona C, centrată în punctul A, iar școala, în zona circulară D, centrată și ea în același punct A.

La primele trei obiective știm că ajungem pe jos, deci există drumuri care pot fi parcurse continuu, cu pasul. Al patrulea obiectiv este situat tot în apropierea blocului A, în zona E, singura diferență fiind că nu există un drum pe care-l putem parcurge continuu, pe jos.

Putem spune că am identificat vecinătăți ale punctului A, mai mici, sau mai mari, unele incluse în altele, iar cartierul X este vecinătatea care le conține pe celelalte.

Ne oprim acum asupra sensului matematic al vecinătății unui număr real.

O mulțime de numere reale $V \subset \mathbb{R}$ se numește vecinătate a numărului real x_0 dacă există un interval centrat în x_0 conținut în V ($\exists I = (x_0 - r, x_0 + r)$ cu r strict pozitiv, astfel încât $I \subset V$).

Vecinătatea nu este neapărat un astfel de interval, dar fiindcă ea conține totdeauna intervale centrate în punct, studiul vecinătăților numerelor reale se reduce la considerarea acestor tipuri de intervale.

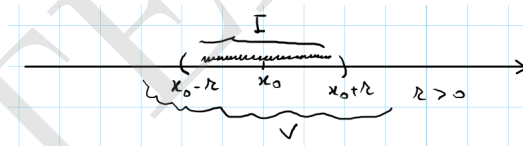


Figura 2: Vecinătatea V a numărului real x_0

Intervalele centrate în x_0 au rolul cercurilor concentrice în care ne imaginăm așezarea obiectivelor, în apropierea blocului de birouri și care asigură continuitatea unor drumuri în jurul blocului A. Este un spațiu în care ne putem mișca neîntrerupt, pe jos. În același mod, în intervalul centrat în x_0 , putem "circular", pe axă, neîntrerupt, iar intervalul este conținut în mulțimea noastră, V .

Să considerăm mulțimea $X = (-2, 3) \cup \{4\}$ și numărul real $x_0 = 2$. Este mulțimea X o vecinătate a lui 2? Găsim "o zonă" pe axa numerelor reale, conținută în mulțimea X , în care ne putem mișca, în mod continuu, în jurul lui 2?

Răspunsul este: DA!

De exemplu, intervalul $(1, 3) = (2 - 1, 2 + 1)$ este un interval centrat în 2, conținut în mulțimea X . Așadar X satisface definiția și este o vecinătate a lui 2, chiar dacă această mulțime nu este un interval.

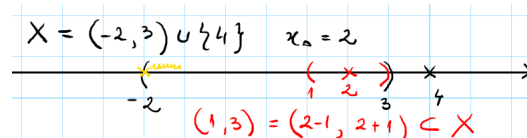


Figura 3: Vecinătatea X a numărului real 2

O altă noțiune, extrem de importantă în conceptul de limită a unei funcții într-un punct, respectiv de limită a unui șir, este punctul de acumulare al unei mulțimi.

Intuitiv, punctul de acumulare al unei mulțimi, poate fi asimilat cu un punct către care vin drumuri continue, prin zona noastră. Fabrica, biblioteca, școala din imaginea 1, pot fi asemuite cu niște puncte de acumulare ale zonei blocului A, fiindcă putem ajunge pe jos, neîntrerupt, către ele, în timp ce, adăpostul pentru animale, deși face parte din zonă, nu are această calitate.

Matematic, un element $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, deci finit sau $\pm\infty$, este punct de acumulare al unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui x_0 se intersectează cu mulțimea A și în alte puncte decât în punctul dat.

$$\forall V \subset \mathcal{D}_{x_0}, V \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Am notat \mathcal{D}_{x_0} mulțimea vecinătăților punctului x_0 .

Cu alte cuvinte, există drumuri continue (fără întreruperi-șanțuri, ape et.) către el. În exemplul nostru numeric, numărul 2 este punct de acumulare al mulțimii X și orice punct al intervalului $(-2, 3)$ va avea această proprietate. Ba chiar, numărul -2, care nu face parte din mulțimea noastră, are aceeași proprietate pentru că toate vecinătățile lui -2 vor conține drumuri continue prin mulțimea X către -2, pe axa numerelor reale, pe partea lui dreaptă.

Dacă un punct face parte din mulțime, dar nu este punct de acumulare pentru aceasta, el se numește punct izolat al mulțimii.

În exemplul nostru practic, adăpostul pentru animale face parte din zonă, dar nu ajung drumuri continue, prin zonă, chiar la el. Așadar, este un fel de punct izolat al zonei.

În exemplul nostru numeric, numărul 4 aparține mulțimii X , dar nu este punct de acumulare al mulțimii, pentru că găsim cel puțin o vecinătate a lui 4, de exemplu intervalul $(3, 5)$

care nu se intersectează cu mulțimea X în alte puncte decât în 4:

$$\exists(3,5) \in \mathcal{D}_4, (3,5) \cap X \setminus \{4\} = \emptyset$$

Cum 4 este element al mulțimii X , dar nu este punct de acumulare al acesteia, rezultă că 4 este punct izolat al acestei mulțimi.

Atunci când vom scrie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

însemnând că vom calcula limita funcției în punctul x_0 , acest x_0 este, obligatoriu, punct de acumulare pentru domeniul de definiție al funcției f .

Așadar, noțiunea de limită a unei funcții într-un punct are sens doar în punctele de acumulare ale domeniului.