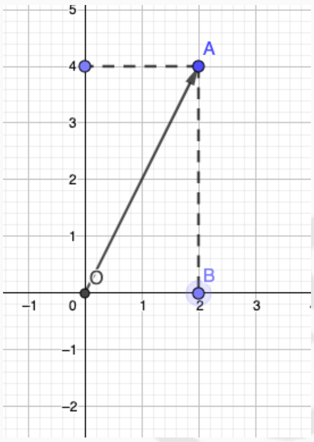
MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare	Numere complexe

Breviar teoretic

Modulul și conjugatul unui număr complex

Ținând cont că fiecărui număr complex îi corespunde în planul în care avem definit un reper cartezian *xOy,* asemănător definiției modulului numărului real, vom defini modulul numărului complex ca fiind distanța de la origine la punctul al cărui afix este, acesta fiind notat la fel.



Prin urmare, dacă $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, vom putea scrie $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, aceasta putând fi obținut din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul OAB.

Putem observa imediat că $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ și că $|z| = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$.

<u>*Propirețăți ale modulului unui număr complex*</u>

1. $|z| = |-z|, \forall z \in \mathbb{C}$;
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_1|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $|z^n| = |z|^n, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$;
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}^*$;
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

<u>*Observație*</u>

Egalitatea din proprietatea 5 se realizează dacă și numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $z_1 = \lambda z_2$.

<u>*Exemple*</u>

1. $|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$;
2. $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$;

3. $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$;
4. $|-2| = |-2 + 0i| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$;
5. $|(3+4i)^4| = |3+4i|^4 = (\sqrt{3^2+4^2})^4 = 5^4$;
6. $\left|\frac{1+i}{(3-4i)^2}\right| = \frac{|1+i|}{|3-4i|^2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{(\sqrt{3^2+4^2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{5^2}$.

Fiind dat un număr complex $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, vom defini numărul complex $\overline{z} = a - bi$ ca fiind conjugatul numărului z, iar în mod evident $\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z, \forall z \in \mathbb{C}$, de unde și numele.

Proprietăți ale conjugatului unui număr complex

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $\overline{z^n} = \overline{z}^n, \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$;
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}^*$;
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$;
6. $\overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$;
7. $z = \overline{z}$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$;
8. $\overline{z} = -z$ dacă și numai dacă $z \in i\mathbb{R}$.

Exemple

1. $\overline{1+2i} = 1 - 2i$;
2. $\overline{1-2i} = 1 + 2i$;
3. $\overline{2} = \overline{2+0i} = 2 - 0i = 2$;
4. $\overline{5i} = \overline{0+5i} = 0 - 5i = -5i$.

În particular, folosind conjugatul unui mumăr complex, vom putea să aflăm și inversul său.
Astfel $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.
Pentru a afla partea reală și partea imaginară a numărului $\frac{1}{1+2i}$ vom folosi conjugatul numitorului:

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$