Unitatea de învățare	Numere complexe

Breviar teoretic

Ecuații bipătrate

Încercând să rezolvând ecuația $x^4 + x^2 = 0$, în mod natural, putem rescrie ecuația $x^2(x^2 + 1) = 0$ cu soluțiile ce decurg din rezolvarea a două ecuații de gradul 2: $x^2 = 0$ și $x^2 + 1 = 0$, acestea fiind $0, \pm i$.
Plecând de la această rezolvare, nu vom putea rezolva un anumit tip de ecuații asemănător?
În cazul ecuației $x^4 + x^2 - 2 = 0$, am putea să considerăm $x^2 = t$, ecuația dată devenind $t^2 + t - 2 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 1$, respectiv $t_2 = -2$. Revenind, vom avea de rezolvat două ecuații $x^2 = 1$, cu soluțiile ± 1, respectiv $x^2 = -2$, cu soluțiile $\pm i\sqrt{2}$.

Definitie
O ecuație de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$ se numește *bipătrată*. Notând $x^2 = t$, vom obține $at^2 + bt + c = 0$, iar după obținerea soluțiilor t_1, t_2, vom rezolva ecuațiile $x^2 = t_{1,2}$.

Exemple
1. Pentru rezolvarea ecuația $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ vom nota $x^2 = t$ și obținem ecuația $t^2 - 3t + 2 = 0$ cu rădăcinile $t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, adică vom avea de rezolvat ecuațiile $x^2 = 1$ și $x^2 = 2$ cu soluțiile $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.
2. După ce facem notația $x^2 = t$, ecuația $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ se reduce la rezolvarea ecuației $t^2 + 3t + 2 = 0$ cu cu rădăcinile $t_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$, iar apoi la rezolvarea ecuațiilor $x^2 = -1$ și $x^2 = -2$ cu soluțiile $x_{1,2} = \pm i, x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$.
3. Ecuația $x^4 + (m+1)x^2 + m = 0$ ar putea avea toate rădăcinile reale în cazul în care, după ce facem notația $x^2 = t$, punem condițiile ca ecuația $t^2 + (m+1)t + m = 0$ să aibă ambele rădăcini reale pozitive sau egale cu zero.

Condițiile care trebuie să fie îndeplinite sunt : $\Delta \geq 0, S = -\frac{b}{a} \geq 0, P = \frac{c}{a} \geq 0$. Prin urmare, avem de rezolvat $\Delta = (m+1)^2 - 4m \geq 0$ adică $(m-1)^2 \geq 0$, adevărat oricare m real, $S = -(m+1) \geq 0$ cu $m \in (-\infty, -1]$, respectiv $P = m \geq 0$.
În final, obervăm că intersecția este mulțimea vidă, deci ecuația dată nu poate avea toate rădăcinile reale.