MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare	Numere complexe

Breviar teoretic

Rădăcinile cubice complexe ale lui 1 și ale lui -1

Ecuația $x^3 - 1 = 0$ se poate scrie $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Vom obține $x - 1 = 0$ sau $x^2 + x + 1 = 0$. Din prima ecuație obținem $x = 1$, singura rădăcină reală a ecuației, iar din a doua obținem $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

De obicei se utilizează notația $\epsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Se observă că $\epsilon^2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - 2i\sqrt{3} - 3}{4} = \dfrac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Din cele scrise mai sus, vom putea deduce :

Proprietăți

1. Rădăcinile ecuației $x^3 = 1$ sunt $1, \epsilon, \epsilon^2$;
2. $\epsilon^3 = 1, \epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0, \epsilon^{3k} = 1, \epsilon^{3k+1} = \epsilon, \epsilon^{3k+2} = \epsilon^2, \forall k \in \mathbb{Z}$;
3. $\epsilon^2 = \bar{\epsilon} = \dfrac{1}{\epsilon}$;
4. $|\epsilon| = 1$.

Exemple

1. $\epsilon^{200} + \dfrac{1}{\epsilon^{200}} = \epsilon^{3 \cdot 66+2} + \dfrac{1}{\epsilon^{3\cdot 66+2}} = (\epsilon^3)^{66}\epsilon^2 + \dfrac{1}{(\epsilon^3)^{66}\epsilon^2} = \epsilon^2 + \dfrac{1}{\epsilon^2} = \epsilon^2 + \epsilon = -1.$

2. $(a+b)(a+\epsilon b)(a+\epsilon^2 b) = (a+b)(a^2 + ab\epsilon^2 + ab\epsilon + \epsilon^3 b^2) =$
$= (a+b)(a^2 + ab(\epsilon+\epsilon^2) + b^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$

Ecuația $x^3 + 1 = 0$ se poate scrie $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$. Vom obține $x + 1 = 0$ sau $x^2 - x + 1 = 0$. Din prima ecuație obținem $x = -1$, singura rădăcină reală a ecuației, iar din a doua obținem $x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

De obicei se utilizează notația $\omega = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, deci $\omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$.

Observăm că $\omega = -\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\epsilon^2 = \epsilon + 1$.

Exemple

1. $\omega^{200} + \omega^{100} + 1 = \omega^{3\cdot 66+2} + \omega^{3\cdot 33+1} + 1 = (\omega^3)^{66}\omega^2 + (\omega^3)^{33}\omega + 1 = \omega^2 - \omega + 1 = 0.$
2. $\omega^9 - \omega^4 = (\omega^3)^3 - \omega^3\omega = -1 + \omega = \omega^2.$

MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER