Unitatea de învățare	Numere complexe

Transcript

Rezolvarea ecuației de gradul al doilea și aplicațiile ei

1. Pentru aflarea rădăcinilor ecuației $3x^2 - x + 2 = 0$ vom calcula mai întâi discriminaitul.
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23 < 0$, apoi $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{23}}{6}$.

2. Ecuația $x^2 - mx + 2 = 0$ are rădăcinile complexe nereale dacă $\Delta = m^2 - 8 < 0$, adică $m \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, acestea au modulele egale deoarece $x_2 = \overline{x_1}$, iar $x_1x_2 = x_1\overline{x_1} = |x_1|^2$. Din relațiile lui Viete deducem că $|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$.

3. O ecuație de gradul 2 cu coeficienți reali care are o rădăcină numărul complex $2 - i$ are și cealaltă rădăcină conjugata acestui număr, prin urmare $x_1 = 2 - i, x_2 = 2 + i$.
Așadar $S = x_1 + x_2 = (2 - i) + (2 + i) = 4, P = x_1x_2 = (2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$, una din ecuațiile care are ca rădăcini cele două numere este $x^2 - Sx + P = 0$, adică $x^2 - 4x + 5 = 0$.

4. Dacă rădăcinile ecuației $x^2 - x + 2 = 0$ sunt x_1 și x_2, vom calcula expresia
$E = \dfrac{x_1^3 - 2x_1 + 1}{x_1^2 - x_1} + \dfrac{x_2^3 - 2x_2 + 1}{x_2^2 - x_2}$ încercând rescrierea acesteia sub o formă mai simplă.
Pentru $k \in \{1,2\}$ avem $x_k^2 = x_k - 2$, deci $x_k^3 = x_k^2 - 2x_k = x_k - 2 - 2x_k = -2 - x_k$.
Astfel $E = \dfrac{-2 - x_1 - 2x_1 + 1}{x_1 - 2 - x_1} + \dfrac{-2 - x_2 - 2x_2 + 1}{x_2 - 2 - x_2} = \dfrac{3x_1 + 1}{2} + \dfrac{3x_2 + 1}{2} =$
$= \dfrac{3}{2}(x_1 + x_2) + 1 = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$.