

Breviar teoretic

Rezolvarea ecuației de gradul 2 cu coeficienți reali

În clasele anterioare am învățat să aflăm rădăcinile reale ale ecuației de gradul 2:  
 $ax^2 + bx + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$ .

Știm că în cazul în care  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , rădăcinile reale sunt  $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Pentru obținerea rădăcinilor în cazul  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , vom proceda asemănător. Astfel,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\begin{aligned} \text{Vom pute scrie } ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{4a} = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right). \end{aligned}$$

Deducem că rădăcinile ecuației de gradul 2 cu coeficienți reali  $a, b, c$  sunt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple

1. Ecuația  $x^2 + 2x + 2 = 0$  cu  $\Delta = -4 < 0$  are soluțiile

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{-(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

2. Pentru determinarea rădăcinilor ecuației  $x^2 + 4 = 0$  nu este necesar calculul discriminantului. Putem proceda după cum urmează:  $x^2 = -4$ , acest putând fi rescrisă  $x^2 = (2i)^2$  cu soluțiile  $x_{1,2} = \pm 2i$ .

Efectuând suma și produsul rădăcinilor găsim  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$ , respectiv  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , relații care sunt întocmai ca în cazul în care rădăcinile ecuației ar fi fost reale, acestea fiind numite relațiile lui Viète.

### Exemple

1. Dacă  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 + 3x + 7 = 0$ , atunci ținând cont din relațiile lui Viete că  $x_1 + x_2 = -3, x_1x_2 = 7$ , vom putea calcula

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-3)^2 - 2 \cdot 7 = 9 - 14 = -5$$

2. Modulul rădăcinilor ecuației  $x^2 + x + 4 = 0$  este 2.

Într-adevăr, ținând cont că  $\Delta = -15 < 0$ , deducem că rădăcinile sunt complexe nereale și  $x_2 = \bar{x}_1$ . Din relația  $x_1\bar{x}_1 = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 4$  obținem  $|x_1|^2 = 4$ , adică  $|x_1| = |x_2| = 2$ .

Invers, în cazul în care dorim să determinăm o ecuație de gradul 2 cu coeficienți reali care are rădăcina  $z_1 = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$  trebuie să ținem cont de natura coeficienților.

Deducem că a doua rădăcină este conjugata primeia,  $z_2 = \bar{z}_1 = a - bi$ . O ecuație care are cele două rădăcini este  $(x - z_1)(x - z_2) = 0$ , iar după efectuarea înmulțirilor  $x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1z_2 = 0$  adică  $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$  sau  $x^2 - 2(\operatorname{Re}(z_1))x + |z_1|^2 = 0$ .

### Exemple

1. Ecuația cu coeficienți reali și care are o rădăcină  $z_1 = 2 - 3i$  este  $x^2 - 4x + 13 = 0$ .

2. Rădăcinile ecuației  $x^2 + 3x + 5 = 0$  au suma  $S = -3$ , iar  $P = 5$ .

În cazul în care se dorește descompunerea trinomului  $ax^2 + bx + c$ , vom putea scrie  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , unde  $x_1, x_2$  sunt rădăcinile ecuației atașate.

### Exemplu

Ecuația  $3x^2 - 6x + 6 = 0$  are rădăcinile  $x_{1,2} = 1 \pm i$ , deci

$$3x^2 - 6x + 6 = 3(x - 1 - i)(x - 1 + i).$$

Observăm că descompunerea trinomului cu coeficienți reali se poate face în produs de factori cu coeficienți complecși nereali.