MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare	Numere complexe

Transcript

Proprietăți ale modulului și conjugatului unui număr complex

---

1. Vom calcula modulul numărului complex $z=\dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$.

$$|z|=\left|\frac{(1+2i)^2}{2-i}\right|=\frac{|(1+2i)^2|}{|2-i|}=\frac{|1+2i|^2}{|2-i|}=\frac{\sqrt{1^2+2^2}^2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}.$$

2. Vom rezolva ecuația $z^3=\bar{z}$.
Din ecuația dată obținem, trecând la modul, $|z^3|=|\bar{z}|$, dar $|\bar{z}|=|z|$, deci $|z^3|=|z|$, mai mult, $|z|^3=|z|$ cu soluțiile $|z|\in\{0,1\}$.
În cazul în care $|z|=0$ vom obține z=0.
În cazul în care $|z|=1$, atunci după înmulțirea ecuației date cu z vom obține $z^4=z\bar{z}$, adică $z^4=|z|^2=1$, pe care o putem rescrie $z^4-1=0$ și mai departe $(z^2-1)(z^2+1)=0$ cu rădăcinile $\pm 1, \pm i$.

3. Vom determina numărul complex z pentru care fracția $\dfrac{1-z}{1+z}$ este număr real.
Putem da o primă soluție rescriind fracția după forma algebrică $z=a+bi, a, b\in\mathbb{R}$, apoi amplificăm cu conjugatul numitorului.

$$\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{(1-a-bi)(1+a-bi)}{(1+a+bi)(1+a-bi)}=\frac{1-2bi-b^2-a^2}{(1+a)^2+b^2}=\frac{1-b^2-a^2}{(1+a)^2+b^2}-\frac{2bi}{(1+a)^2+b^2}$$

Cum fracția este număr real va rezulta că $b=0$, adică orice număr real $z\neq-1$ indeplinește condiția din enunț.
A doua soluție este obținută punând condiția ca $\dfrac{1-z}{1+z}=\overline{\dfrac{1-z}{1+z}}=\dfrac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}}$.
Obținem $(1-z)(1+\bar{z})=(1-\bar{z})(1+z)$. După efectuarea calculelor vom avea $z=\bar{z}$, ceea ce conduce la ideea că $z\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.