

Breviar teoretic

Forma algebrică a numerelor complexe

Plecând de la mulțimea numerelor reale, vom face construcția numerelor complexe.

Considerăm mai întâi mulțimea perechilor ordonate de numere reale  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , cu precizarea că perechile  $(a, b)$  și  $(a', b')$  sunt egale dacă și numai dacă  $a = a'$  și  $b = b'$ .

Pentru  $z_1 = (a_1, b_1)$ ,  $z_2 = (a_2, b_2)$  din mulțimea  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vom defini două operații :

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ , *suma dintre*  $z_1$  și  $z_2$ , iar operația prin care se asociază celor două elemente suma lor, se numește *adunare*;
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$ , *produsul dintre*  $z_1$  și  $z_2$ , iar operația prin care se asociază celor două elemente produsul lor, se numește *înmulțire*.

Definiție

Elementele mulțimii  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pe care s-au definit operațiile de mai sus, se numesc numere complexe, iar mulțimea lor se notează cu  $\mathbb{C}$ .

Vom considera mulțimea  $R' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ .

Observăm că operațiile definite mai sus aplicate elementelor din  $R'$  se fac după aceleași reguli ca adunarea și înmulțirea numerelor reale. Într-adevăr, pentru elementele din  $R'$

$$z_1 + z_2 = (a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0), \text{ iar } z_1 \cdot z_2 = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 \cdot a_2, 0).$$

Acest comportament ne permite înlocuirea numărului complex  $(a, 0)$  cu numărul real  $a$  și invers.

Proprietățile adunării numerelor complexe

1. Asociativitatea :  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ;
2. Comutativitatea:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ;
3. 0 este element neutru:  $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1, \forall z_1 \in \mathbb{C}$ ;
4. Orice număr complex are un opus: oricare  $z \in \mathbb{C}$  există  $-z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $z + (-z) = -z + z = 0$ .

Proprietățile înmulțirii numerelor complexe

1. Asociativitatea:  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ;
2. Comutativitatea:  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ;
3. 1 este element neutru:  $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$ ;
4. Orice număr complex nenul are un invers: oricare  $z \in \mathbb{C}^*$  există  $z^{-1} \in \mathbb{C}$  astfel încât  $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ .

### Înmulțirea este distributivă față de adunare

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Vom nota cu  $i$  perechea  $(0,1)$  și vom calcula

$$i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0), \text{ ajungând la } i^2 = -1.$$

Deoarece  $(a, b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1)$ , putem să scriem orice număr complex sub forma  $a + bi$  cu  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $i^2 = -1$  și reciproc, aceasta fiind forma algebrică a numerelor complexe.

Pentru numărul complex  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a$  se numește *partea reală* și se notează cu  $Re(z)$ , iar  $bi$  se numește *partea imaginară*, coeficientul său notându-se cu  $Im(z)$ ,  $i$  numindu-se unitatea imaginară.

#### Observație

Cum notația  $a+bi$  reprezintă perechea  $(a,b)$  va reieși că  $a + bi = c + di$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $a=c$  și  $b=d$ .

#### Exemple

- $(1 + 2i) + (2 + 3i) = 3 + 5i;$
- $(1 + 2i) \cdot (2 + 3i) = 3 + 5i.$

#### Puterile numărului $i$

Observăm că  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ .

Obținem că  $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, \forall n \in \mathbb{N}$ .

#### Exemple

- $i^{2024} = (i^4)^{506} = 1;$
- Observând că  $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ , putem calcula prin grupare  $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{200} = 0;$
- Observând că  $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ , putem calcula  $(1 + i)^{2021} = ((1 + i)^2)^{1010} (1 + i) = (2i)^{1010} (1 + i) = 2^{1010} (1 + i).$