Unitatea de învățare	Numere complexe

Transcript

Matematica utilitară-numere complexe

Numerele complexe sunt utile în reprezentarea unui fenomen care are două părți care variază în același timp, de exemplu un curent alternativ. De asemenea, undele radio, undele sonore și microundele trebuie să călătorească prin diferite medii pentru a ajunge la destinația finală. Există multe cazuri în care inginerii, medicii, oamenii de știință, proiectanții de vehicule și alții care utilizează semnale electromagnetice trebuie să știe cât de puternic este un semnal când ajunge la destinație. Cele două părți din acest context sunt: rotația semnalului și a puterea acestuia, iar următoarele sunt exemple ale acestui fenomen:

- Un semnal de microfon care trece printr-un amplificator;
- Un semnal de telefon mobil care călătorește de la o antenă la un telefon aflat la câțiva kilometri distanță;
- O undă sonoră;
- Un semnal cu ultrasunete folosit de ecograf;
- Designul aplicațiilor software.

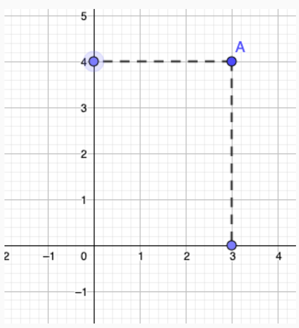
Știm că ecuația $x^2 - 1 = 0$ are rădăcinile ± 1, iar ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are rădăcini reale.

O rădăcină a ultimei ecuații, notată cu i, are proprietatea $i^2 = -1$.

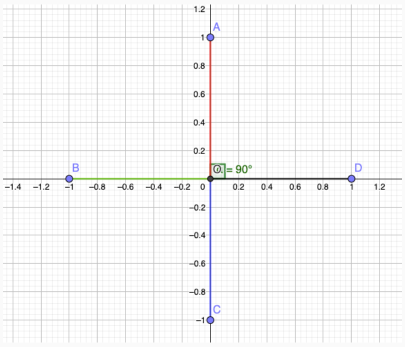
Această introducere duce la construcția mulțimii numerelor complexe care conțin rădăcini ale ecuațiilor de gradul 2 cu coeficienți reali și discriminantul negativ despre care știam că nu admit rădăcini reale.

Vom utiliza are forma algebrică a unui număr complex, $a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$.

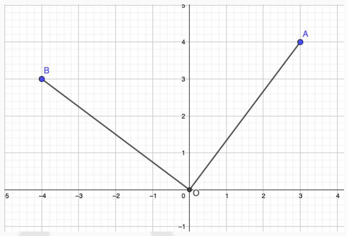
Așa cum numerelor reale le-am atribuit un punct pe o dreaptă, tot așa vom putea să atribuim unui număr complex un punct în plan. Numărului complex $3 + 4i$ îi corespunde, în plan, punctul A care are abscisa 3 și ordonata 4.



Calculând $i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = i^3 \cdot i = 1$ observăm că punctele corespunzătoare numerelor i, i^2, i^3, acele obținute după operația de înmulțire cu i sunt obținute succesiv după o rotație de 90°.

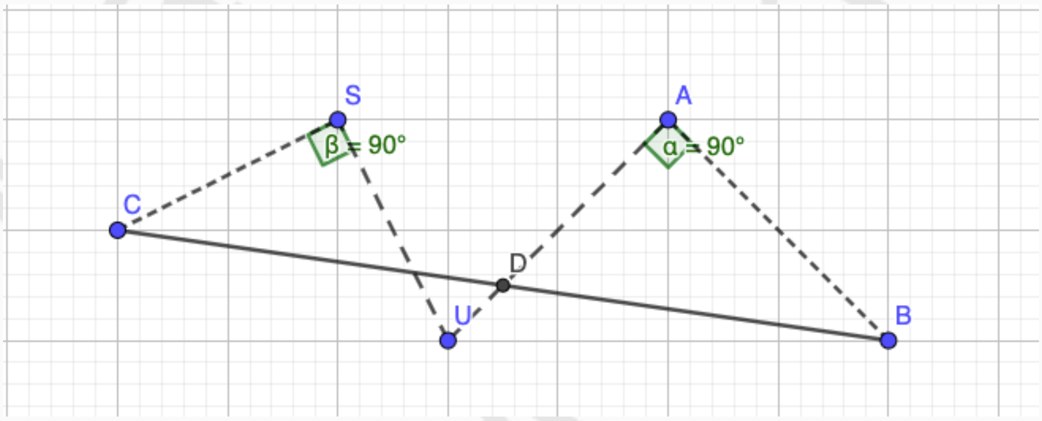


Devine destul de clar că o aplicație a numerelor complexe o reprezintă rotația, astfel în aplicațiile software acestea se folosea pentru a realiza o mișcare.
După efectuarea înmulțirii cu i a numărului considerat obținem $(3+4i)i = -4+3i$, adică punctul A se va “muta” în B după o rotație de 90°, triunghiul OAB fiind dreptunghic isoscel.



Pentru că aplicațiile din celelalte discipline depășesc nivelul cunoștințelor acumulate până în clasa aX-a, vom da un exemplu de aplicație în geometrie.

Un pirat vrea să-și ascundă comoara pe o insulă. Acesta se folosește de trei copaci, un arin, un ulm și un salcâm ca reper pentru a îngropa comoara procedând astfel: măsoară distanța dintre ulm(U) și arin(A) și execută o rotație de 90° a punctului U față de A. La fel va proceda față de salcâm(S) obținând punctele B, respectiv C. În punctul care este mijlocul segmentului BC va îngropa comoara, apoi va pleca de pe insulă.
Peste ani va reveni pe insulă cu gândul de a dezgropa comoara, însă observă că ulmul a dispărut. Cum va proceda pentru a găsi comoara?
Utilizând numerele complexe, comoara poate fi descoperită destul de ușor.



Atribuind fiecărui punct care reprezintă un copac un număr complex notat cu litere mică ce corespunde literei mari vom putea scrie $b-a = i(u-a)$ pentru a traduce obținerea punctului B prin rotația de 90°, apoi $u-s = i(c-s)$. Obținem $b = a+i(u-a)$, respectiv $c = s+i(s-u)$, iar mijlocului segmentului BC, notat cu D, îi corespunde $d = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{1}{2}(a+i(u-a)+s+i(s-u)) = \dfrac{1}{2}(a+s)+\dfrac{i}{2}(s-a)$, adică

$d - \frac{a+s}{2} = i\frac{s-a}{2}$, ceea ce înseamnă că segmentul determinat de D mijlocul segmentului AS, notat cu M, sunt perpendiculare și $DM = \frac{AS}{2}$.(*)

Având la dispoziție arinul și salcâmul, va determina mijlocul segmentului AS și va descoperi locul în care se află comoara ducând perpendiculară pe AS și ținând cont de (*).