Unitatea de învățare	Logaritmi

Videoclip: Compararea logaritmilor.

Ce învățăm din videoclip:

- **să aplicăm reguli de comparare** a logaritmilor;
- **să utilizăm conexiuni** între noțiuni studiate anterior și proprietățile logaritmilor;
- **să alegem strategii potrivite de rezolvare** pentru optimizarea calculelor.

Compararea logaritmilor se face după aceleași reguli pe care le-am întâlnit la compararea puterilor:

$$\begin{cases} dacă\ a \in (0,1), atunci\ x \le y\ (x, y > 0) \Leftrightarrow \log_a x \ge \log_a y \\ dacă\ a \in (0,1), atunci\ x \le y\ (x, y > 0) \Leftrightarrow \log_a x \ge \log_a y \end{cases}$$

1. **Comparați $\log_2 6$ cu $\log_4 25$.**

Deși al doilea logaritm nu are aceeași bază cu primul, acesta se poate transforma, utilizând proprietățile logaritmilor, în funcție de un logaritm în bază 2:

$$\log_4 25 = \log_{2^2} 5^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 5 = \log_2 5$$

Cum baza logaritmului este număr supraunitar, ordinea dintre argumente se va păstra între logaritmi:

$$6 > 5 \Leftrightarrow \log_2 6 > \log_2 5 \ \Leftrightarrow \log_2 6 > \log_4 25$$

2. **Comparați $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{5}$ cu 2.**

Pentru a putea compara logaritmi de aceeași bază, îl vom scrie pe 2 sub formă de logaritm. Vom scrie:

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{3}$$

Baza logaritmilor, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, este număr subunitar, așadar ordinea dintre argumente se va schimba între logaritmi:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{5} > \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{5} > 2$$

Putem avea, însă, de comparat și logaritmi care nu sunt în aceeași bază.

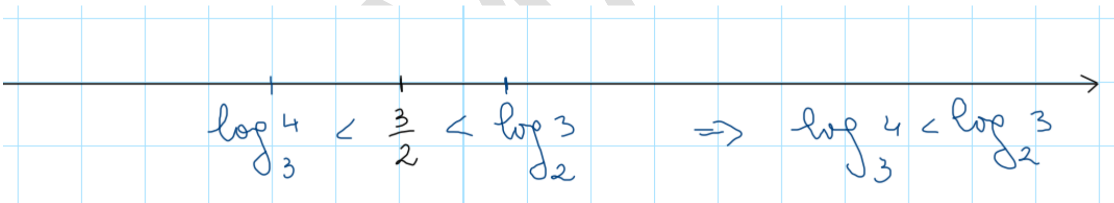
3. Comparați $\log_2 3$ cu $\log_3 4$.

Niciunul dintre logaritmi nu poate fi adus, convenabil, la forma unui logaritm cu baza celuilalt. Tehnica pentru aceste comparări, este, în general, intercalarea unui număr, eventual rațional, între cei doi logaritmi.
Vom porni cu numărul 3, argumentul primului logaritm, care ar trebui comparat cu o putere, de exponent rațional, a bazei 2.

$$3 = \sqrt{9} > \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \log_2 3 > \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

Avantajos ar fi dacă al doilea logaritm ar fi mai mic decât același număr, $\frac{3}{2}$. Încercăm să comparăm argumentul 4 cu o putere, de exponent rațional, a bazei 3.

$$4 = \sqrt{16} < \sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \log_3 4 < \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$



Concluzia este $\log_3 4 < \log_2 3$.