

Capitolul      Mulțimea numerelor reale

Unitatea de învățare      Logaritmi: compararea logaritmilor și operația de logaritmare

### Breviar teoretic

Compararea logaritmilor se bazează pe compararea puterilor cu exponent real din unitatea de învățare anterioară.

Ne reamintim!

Dacă  $a \in (0,1)$ , atunci:  $x \leq y \Leftrightarrow a^x \geq a^y$ . (ordinea dintre exponenți se schimbă între puteri)

Dacă  $a \in (1, \infty)$ , atunci  $x \leq y \Leftrightarrow a^x \leq a^y$ . (ordinea dintre exponenți se păstrează între puteri).

Logaritmul s-a definit cu bază strict pozitivă și diferită de 1, pentru numere strict pozitive:

$$\log_a b, a, b > 0, a \neq 1$$

#### Compararea logaritmilor de bază subunitară

**Dacă  $a \in (0, 1)$  și  $x, y \in (0, \infty)$ , atunci  $x \leq y \Leftrightarrow \log_a x \geq \log_a y$ .**

lăță de ce!

$$x \leq y \Leftrightarrow a^{\log_a x} \leq a^{\log_a y} \text{ (} a \text{ bază subunitară)} \Leftrightarrow \log_a x \geq \log_a y$$

Ordinea dintre două numere strict pozitive se schimbă între logaritmi de aceeași bază subunitară. Reciproc, ordinea dintre doi logaritmi de aceeași bază subunitară se schimbă între argumentele lor.

#### Compararea logaritmilor de bază supraunitară

**Dacă  $a \in (1, \infty)$  și  $x, y \in (0, \infty)$ , atunci  $x \leq y \Leftrightarrow \log_a x \leq \log_a y$ .**

lăță de ce!

$$x \leq y \Leftrightarrow a^{\log_a x} \leq a^{\log_a y} \text{ (} a \text{ bază supraunitară)} \Leftrightarrow \log_a x \leq \log_a y$$

Ordinea dintre două numere strict pozitive se păstrează între logaritmi de aceeași bază supraunitară. Reciproc, ordinea dintre doi logaritmi de aceeași bază supraunitară se păstrează între argumentele lor.

### Semnul unui logaritm

Fie  $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ .

**Dacă  $a, b \in (0, 1)$  sau  $a, b \in (1, \infty)$ , atunci  $\log_a b > 0$  (dacă baza și argumentul au aceeași poziție față de 1, atunci logaritmul este pozitiv).**

**Dacă  $a \in (0, 1)$  și  $b \in (1, \infty)$ , sau  $a \in (1, \infty)$  și  $b \in (0, 1)$ , atunci  $\log_a b < 0$  (dacă baza și argumentul au poziții diferite față de 1, atunci logaritmul este negativ).**

Pentru compararea logaritmului cu 0, vom scrie  $0 = \log_a 1$

Când  $a \in (0, 1)$ :  $\begin{cases} \text{dacă } b < 1, \text{ atunci } \log_a b > \log_a 1, \text{ deci } \log_a b > 0 \\ \text{dacă } b > 1, \text{ atunci } \log_a b < \log_a 1, \text{ deci } \log_a b < 0 \end{cases}$

Când  $a \in (1, \infty)$ :  $\begin{cases} \text{dacă } b < 1, \text{ atunci } \log_a b < \log_a 1, \text{ deci } \log_a b < 0 \\ \text{dacă } b > 1, \text{ atunci } \log_a b > \log_a 1, \text{ deci } \log_a b > 0 \end{cases}$

**Exemple:**

**1. Comparați numerele  $a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{49}$  și  $b = 2\log_2 5 + 1$**

Pentru a compara cele două numere le vom aduce la forma unor logaritmi de aceeași bază.

$$a = \log_{2^{-1}} 7^{-2} = (-1) \cdot \left(\frac{1}{-1}\right) \log_2 7^2 = \log_2 49$$

$$b = 2\log_2 5 + 1 = \log_2 5^2 + \log_2 2 = \log_2(5^2 \cdot 2) = \log_2 50$$

Cum  $49 < 50$ , iar logaritmi au baza 2 (supraunitară), rezultă  $\log_2 49 < \log_2 50$ , deci  $a < b$ .

**2. Comparați cu 0 următorii logaritmi:  $\log_2 \frac{1}{3}$ ;  $\log_4 3$ ;  $\log_{a^2+1} \left(\frac{1}{\sqrt{a^4+2}}\right)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ .**

În primul caz, baza este 2, deci supraunitară, iar argumentul este  $\frac{1}{3}$ , subunitar. Cum baza și argumentul au poziții diferite față de 1, deducem că  $\log_2 \frac{1}{3} < 0$ .

În al doilea caz, baza este 4, iar argumentul este 3, ambele supraunitare, deci  $\log_4 3 > 0$ .

În cel de-al treilea caz,  $a^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}^*$ , deci  $a^2 + 1 > 1$  și  $\frac{1}{\sqrt{a^4+2}} < 1$ . Cum baza și argumentul au poziții diferite față de 1,  $\log_{a^2+1} \left(\frac{1}{\sqrt{a^4+2}}\right) < 0, \forall a \in \mathbb{R}^*$ .

**3. Calculați  $N = [\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \dots + [\lg 200]$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .**

Logaritmii din problema propusă sunt logaritmi zecimali, deci au baza 10, supraunitară.

Pentru numerele naturale  $k$ , unde  $1 \leq k < 10$ , rezultă  $\lg 1 \leq \lg k < \lg 10$ , deci

$$0 \leq \lg k < 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, 9\}, \text{ de unde deducem că } [\lg 1] = [\lg 2] = \dots = [\lg 9] = 0$$

Pentru numerele naturale  $k$ , unde  $10 \leq k < 100$ , rezultă  $\lg 10 \leq \lg k < \lg 100$ , deci

$$1 \leq \lg k < 2, \forall k \in \{10, 11, \dots, 99\}, \text{ de unde deducem că } [\lg 10] = [\lg 11] = \dots = [\lg 99] = 1$$

Pentru numerele naturale  $k$ , unde  $100 \leq k \leq 200$ , rezultă  $\lg 100 \leq \lg k \leq \lg 200 < \lg 1000$ , deci  $2 \leq \lg k < 3, \forall k \in \{100, 101, \dots, 200\}$ , de unde deducem că

$$[\lg 100] = [\lg 101] = \dots = [\lg 200] = 2$$

$$\text{Obținem } N = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{\text{de 9 ori}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de 90 de ori}} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{\text{de 101 ori}} = 90 + 202 = 292.$$

**4. Demonstrați că  $3 \log_3(x + y + z) \geq \log_3 x + \log_3 y + \log_3 z + 3, \forall x, y, z > 0$ .**

Pentru numerele  $x, y, z$  pozitive, are loc inegalitatea mediilor:  $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ .

Cum 3 este bază supraunitară, deducem că

$$\log_3 \left( \frac{x + y + z}{3} \right) \geq \log_3 \sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow \log_3(x + y + z) - \log_3 3 \geq \frac{1}{3} \log_3(xyz) \Leftrightarrow$$

$$\log_3(x + y + z) - 1 \geq \frac{1}{3}(\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z) \Leftrightarrow$$

$$3 \log_3(x + y + z) - 3 \geq \log_3 x + \log_3 y + \log_3 z \Leftrightarrow$$

$$3 \log_3(x + y + z) \geq \log_3 x + \log_3 y + \log_3 z + 3$$

**5. Aflați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $\log_2(2x + 1) > 3$ .**

Înainte de a analiza compararea celor două numere, vom impune condiția de existență pentru logaritm. Baza, fiind constantă, nu necesită condiții de existență, aceasta respectând condițiile de definire. Impunem condiția ca argumentul logaritmului să fie strict pozitiv:

$$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) = D_{ex}$$

Vom compara logaritmi de aceeași bază, scriindu-l pe 3 ca  $\log_2 2^3$ . Inecuația se transformă în:

$$\log_2(2x + 1) > \log_2 2^3$$

Cum baza logaritmulor este 2, deci supraunitară, ordinea dintre argumente va fi aceeași cu ordinea dintre cei doi logaritmi:

$$2x + 1 > 8 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$$

Ținând cont și de domeniul de existență de mai sus, mulțimea soluțiilor inecuației va fi:

$$S = \left(\frac{7}{2}, \infty\right) \cap \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Leftrightarrow S = \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$$

### Operația de logaritmare

Prin logaritmare a unui număr strict pozitiv sau a unei expresii cu valori strict pozitive, înțelegem calculul logaritmului din numărul dat sau din expresia dată.

$$N \xrightarrow{\text{logaritmare în baza } a} \log_a N, a > 0, a \neq 1$$

$$E(x) \xrightarrow{\text{logaritmare în baza } a} \log_a[E(x)], a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \text{ pentru care } E(x) > 0$$

Baza utilizată frecvent în operația de logaritmare este 10, adică se calculează logaritmul zecimal (lg) al numărului dat sau al expresiei date, dar se poate utiliza orice bază strict pozitivă și diferită de 1.

Avantajul operației de logaritmare este faptul că operații de înmulțire, ridicare la putere, radicali (cu numere mari), se transformă în operații de adunare sau scădere (cu numere mici).

### Exemple:

1. Logaritmați numărul  $N = \frac{2^7 \cdot \sqrt[5]{2}}{10 \sqrt[3]{2^3}}$ .

În acest caz, baza puterilor cu care operează numărul dat este 2. Logaritmare convenabilă este aplicarea logaritmului în bază 2:

$$\log_2 N = \log_2 \frac{2^7 \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[10]{2^3}}$$

Aplicând proprietățile logaritmilor, obținem:

$$\log_2 N = \log_2(2^7 \cdot \sqrt[5]{2}) - \log_2 \sqrt[10]{2^3} = \log_2 2^7 + \log_2 \sqrt[5]{2} - \log_2 2^{\frac{3}{10}}$$

$$\log_2 N = 7 + \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{70 + 2 - 3}{10} = \frac{69}{10} = 6,9$$

**2. Logaritmați expresia  $E(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 \cdot x^6}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}}$  pentru  $x > 0$ .**

Vom folosi, pentru logaritmare, logaritmul zecimal (lg):

$$\lg[E(x)] = \lg\left(\frac{\sqrt[3]{x^2 \cdot x^6}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}}\right) = \lg(\sqrt[3]{x^2 \cdot x^6}) - \lg(x \cdot \sqrt[12]{x^5})$$

$$\lg[E(x)] = \lg \sqrt[3]{x^2} + \lg x^{\frac{7}{6}} - \lg x - \lg \sqrt[12]{x^5} = \frac{2}{3} \lg x + \frac{7}{6} \lg x - \lg x - \frac{5}{12} \lg x$$

$$\lg[E(x)] = \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{6} - 1 - \frac{5}{12}\right) \lg x = \frac{8 + 14 - 12 - 5}{12} \lg x = \frac{5}{12} \lg x$$