Unitatea de învățare	Logaritmi

Videoclip: Proprietăți ale logaritmilor.

Ce învățăm din videoclip:

- **să aplicăm proprietăți ale** logaritmilor;
- **să utilizăm conexiuni** între noțiuni studiate anterior și proprietățile logaritmilor;
- **să alegem strategii potrivite de rezolvare** pentru optimizarea calculelor.

1. Demonstrați că, dacă numerele strict pozitive a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci, pentru oricare $x > 0, x \neq 1$, numerele $\log_x a, \log_x b, \log_x c$ sunt în progresie aritmetică.

Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci $b^2 = ac$, deci $\log_x b^2 = \log_x ac, \forall x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$.

Aplicând proprietățile logaritmilor, găsim

$$2\log_x b = \log_x a + \log_x c \Leftrightarrow \log_x b = \frac{\log_x a + \log_x c}{2} \Leftrightarrow$$

$\log_x a, \log_x b, \log_x c$ sunt în progresie aritmetică (termenul din mijloc este media aritmetică a vecinilor săi).

2. Demonstrați că numărul $N = \lg 11 \cdot \log_{11} 12 \cdot \log_{12} 13 \cdot \ldots \cdot \log_{99} 100$ este număr natural.

Remarcăm faptul că primul factor al produsului este un logaritm zecimal, deci subînțelegem că are baza 10. Pentru toți ceilalți factori ai produsului, vom folosi formula de schimbare a bazei, trecându-i în rapoarte de logaritmi în bază 10:

$$N = \lg 11 \cdot \frac{\lg 12}{\lg 11} \cdot \frac{\lg 13}{\lg 12} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg 100}{\lg 99}$$

După simplificarea factorilor, obținem $N = \lg 100 = 2 \in \mathbb{N}$.

3. Dacă $a = \log_2 3$ și $b = \log_5 4$, calculați, în funcție de a și de b, numărul $c = \log_8 15$.

Vom scrie numerele a, b, c în funcție de logaritmi în aceeași bază. Alegând baza 2, găsim:

$$a = \log_2 3$$

$$b = \log_5 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 5} = \frac{2}{\log_2 5}$$

Dacă vom avea nevoie să înlocuim $\log_2 5$, în exprimarea lui c, atunci acesta va fi:

$$\log_2 5 = \frac{2}{b}$$

$$c = \log_8 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 8} = \frac{\log_2(3 \cdot 5)}{\log_2 2^3} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{3 \log_2 2} = \frac{a + \frac{2}{b}}{3} = \frac{ab + 2}{3b}$$