| Capitolul | Mulțimea numerelor reale |
|---|---|
| Unitatea de învățare | Logaritmi: proprietățile ale logaritmilor |

## Breviar teoretic

**Proprietăți ale logaritmilor**

Proprietățile logaritmilor derivă din definiția acestuia, din operațiile cu puteri de exponenți reali și din proprietățile acestor puteri.

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\boldsymbol{a^{\log_a b} = b, \forall a, b > 0, a \neq 1}$ | **Este chiar definiția logaritmului** |
| **2.** | $\log_a a = 1, \forall a > 0, a \neq 1$ | Din definiție: puterea la care se ridică baza $a$, pentru a obține argumentul $a$, este 1. |
| **3.** | $\log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1$ | Din definiție: puterea la care se ridică baza $a$, pentru a obține argumentul 1, este 0. |
| **4.** | $\log_a a^y = y, \forall a > 0, a \neq 1, y \in \mathbb{R}$ | Din definiție: puterea la care se ridică baza $a$, pentru a obține argumentul $a^y$, este $y$. |
| **5.** | $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\forall a, b, c > 0, a \neq 1$ | Logaritmul unui produs de doi factori pozitivi este egal cu suma logaritmilor celor doi factori ai argumentului. |
| **6.** | $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) =$ $= \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$ $\forall a, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$ | Este generalizarea proprietății anterioare: logaritmul unui produs de $n$ factori ($n \in \mathbb{N}^*$) este egal cu suma logaritmilor celor $n$ factori. |
| **7.** | $\log_a b^n = n \log_a b$, $\forall a, b > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$ | Este consecință directă a proprietății anterioare, pentru $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$ (Exponentul natural al puterii de la argumentul logaritmului iese în fața logaritmului). |
| **8.** | $\log_a b^y = y \log_a b$, $\forall a, b > 0, a \neq 1, y \in \mathbb{R}$ | Logaritmul unei puteri cu exponent real este egal cu produsul dintre exponent și logaritmul din baza puterii. (Exponentul real al puterii de la argumentul logaritmului iese în fața logaritmului). |

| | | |
|---|---|---|
| **9.** | $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b\,, \forall a, b > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$ | Este consecință directă a proprietății anterioare, dat fiind că $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$. Logaritmul unui radical este egal cu produsul dintre inversul ordinului radicalului și logaritmul numărului de sub radical. |
| **10.** | $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c\,,$ $\forall a, b, c > 0, a \neq 1$ | Logaritmul unui raport de numere pozitive este egal cu diferența dintre logaritmul numărătorului și logaritmul numitorului. |
| **11.** | $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \forall a, b, c > 0, a, c \neq 1$ | **Formula de schimbare a bazei:** Logaritmul dintr-un număr pozitiv este egal cu raportul dintre logaritmul, într-o nouă bază, al numărului pozitiv și logaritmul în noua bază din vechea bază. |
| **12.** | $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \forall a, b > 0, a, b \neq 1$ | Logaritmul unui număr pozitiv este inversul logaritmului cu baza și argumentul schimbate între ele. |
| **13.** | $\log_{a^y} b = \frac{1}{y}\log_a b, \forall a, b > 0, a \neq 1, y \in \mathbb{R}^*$ | Exponentul bazei unui logaritm iese inversat în fața logaritmului,. |
| **14.** | $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \forall a > 0, a \neq 1,$ $x, y > 0$ | Logaritmii în aceeași bază din două numere pozitive sunt egali, dacă și numai dacă numerele sunt egale. |
| **15.** | $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}, \forall a, b, c > 0, a \neq 1$ | La o putere cu exponent logaritm, schimbând între ele baza puterii și argumentul logaritmului, valoarea numărului inițial rămâne aceeași. |

**Demonstrarea proprietăților 5-15 și exemple**

Am ales să zăbovim aici asupra demonstrării proprietăților logaritmilor, dat fiind că diverse tehnici utilizate aici sunt extrem de utile în rezolvarea unor exerciții, cu logaritmi.

P5. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c\,, \forall a, b, c > 0, a \neq 1$

Pentru $a, b, c > 0, a \neq 1$, notăm $x = \log_a(bc)$ și $y = \log_a b + \log_a c$. Vom calcula și vom compara $a^x$ și $a^y$:

$$a^x = a^{\log_a(bc)} \stackrel{\text{def}}{=} bc$$

$$a^y = a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} \stackrel{\text{def}}{=} b \cdot c$$

Cum $a^x = a^y$, rezultă $x = y$, deci $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

P6. $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n,$

$$\forall a, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0, a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Proprietatea se poate demonstra folosind procedeul anterior, sau prin inducție matematică. Vom folosi, aici, inducția matematică, pentru propoziția

$$P(n): \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n,$$

$$\forall a, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0, a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

I. Verificarea: $P(1)$: $\log_a b_1 = \log_a b_1$ (adevărată)

Observație: $P(2)$ reprezintă proprietatea 5, demonstrată anterior.

II. Pasul inductiv: Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat. Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$P(k)$: $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k$ (ipoteză de inducție)

$P(k+1)$: $\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k \cdot b_{k+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$

$$\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k \cdot b_{k+1}) = \log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k) \cdot b_{k+1}] =$$

$$= \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k) + \log_a b_{k+1} = (\log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k) + \log_a b_{k+1} =$$

$$= \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

Am demonstrat că $P(k+1)$ este adevărată. Din principiul inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

P7. $\log_a b^n = n \log_a b$, $\forall a, b > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$

Vom folosi proprietatea 6, demonstrată anterior. Pentru $a, b > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\log_a b^n = \log_a \Big(\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{de\ n\ ori\ b}\Big) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b}_{de\ n\ ori\ \log_a b} = n \log_a b$$

P8. $\log_a b^y = y \log_a b$, $\forall a, b > 0, a \neq 1, y \in \mathbb{R}$

Pentru $a, b > 0, a \neq 1, y \in \mathbb{R}$, vom nota $x = \log_a b^y$ și $t = y \log_a b$. Vom calcula și vom compara $a^x$ și $a^t$.

$$a^x = a^{\log_a b^y} \stackrel{\text{def}}{=} b^y$$

$$a^t = a^{y \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^y \stackrel{\text{def}}{=} b^y$$

Cum $a^x = a^t$, rezultă $x = t,$ deci $\log_a b^y = y \log_a b$.

P9. $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \forall a, b > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*$

Această proprietate este consecință directă a proprietății 8:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$$

P10. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \forall a, b, c > 0, a \neq 1$

Pentru $a, b, c > 0, a \neq 1$, putem scrie:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a \left(b \cdot \frac{1}{c}\right) = \log_a (b \cdot c^{-1}) = \log_a b + \log_a c^{-1} = \log_a b + (-1) \log_a c =$$

$$= \log_a b - \log_a c$$

P11. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \forall a, b, c > 0, a, c \neq 1$

Egalitatea de demonstrat este echivalentă cu $(\log_a b) \cdot (\log_c a) = \log_c b$.

Pentru $a, b, c > 0, a, c \neq 1$ vom nota $x = (\log_a b) \cdot (\log_c a)$, $y = \log_c b$, vom calcula și vom compara $c^x$ și $c^y$.

$$c^x = c^{(\log_a b) \cdot (\log_c a)} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\log_a b} \stackrel{\text{def}}{=} b$$

$$c^y = c^{\log_c b} \stackrel{\text{def}}{=} b$$

Cum $c^x = c^y$, rezultă $x = y,$ deci $(\log_a b) \cdot (\log_c a) = \log_c b \Leftrightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

P12. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \forall a, b > 0, a, b \neq 1$

Pentru $a, b > 0, a, b \neq 1$, folosind formula de schimbare a bazei, noua bază aleasă fiind $b$, putem scrie:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

P13. $\log_{a^y} b = \frac{1}{y} \log_a b, \forall a, b > 0, a \neq 1, y \in \mathbb{R}^*$

Pentru $a, b > 0, a, \neq 1, y \in \mathbb{R}^*$ , folosind formula de schimbare a bazei, noua bază aleasă fiind $a$, putem scrie:

$$\log_{a^y} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^y} = \frac{\log_a b}{y \log_a a} = \frac{1}{y} \log_a b$$

P14. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, \forall a > 0, a \neq 1, x, y > 0$

Pentru $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$, putem scrie, conform definiției logaritmului,

$$x = a^{\log_a x} \text{ și } y = a^{\log_a y}$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow a^{\log_a x} = a^{\log_a y} \Leftrightarrow x = y$$

P15. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}, \forall a, b, c > 0, a \neq 1$

Pentru $a, b, c > 0, a \neq 1$, notăm $x = b^{\log_a c}$ și $y = c^{\log_a b}$, apoi calculăm și comparăm $\log_a x$ și $\log_a y$.

$$\log_a x = \log_a b^{\log_a c} = (\log_a c) \cdot (\log_a b)$$

$$\log_a y = \log_a c^{\log_a b} = (\log_a b) \cdot (\log_a c)$$

Cum înmulțirea numerelor reale este comutativă, deci

$$(\log_a c) \cdot (\log_a b) = (\log_a b) \cdot (\log_a c),$$

rezultă că $\log_a x = \log_a y$ ceea ce conduce la $x = y$, adică $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

**Exemple:**

**1. Calculați $\log_8 216$.**

$$\log_8 216 = \log_{2^3} 2^8 = 8 \cdot \log_{2^3} 2 = 8 \cdot \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{8}{3}$$

**2. Calculați suma $S = \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \cdots + \log_3 \frac{80}{81}$.**

$$S = \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \cdots + \log_3 \frac{80}{81} = \log_3 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{80}{81} \right) = \log_3 \frac{1}{81}$$

$$S = \log_3 3^{-4} = -4 \cdot \log_3 3 = -4$$

**3. Calculați $2^{\log_{\frac{1}{2}} 7} + 3^{\log_{\frac{1}{9}} 7}$.**

$$2^{\log_{\frac{1}{2}} 7} + 3^{\log_{\frac{1}{9}} 7} = 2^{\log_{2^{-1}} 7} + 3^{\log_{3^{-2}} 7} = 2^{-\log_2 7} + 3^{-\frac{1}{2}\log_3 7} =$$

$$= \left(2^{\log_2 7}\right)^{-1} + \left(3^{\log_3 7}\right)^{-\frac{1}{2}} = 7^{-1} + 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7} + \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1+\sqrt{7}}{7}$$

**4. Dacă $a = \log_3 75$ și $b = \log_3 60$ , calculați, în funcție de $a$ și de $b$, $\log_{12} 40$.**

Vom scrie logaritmul cerut, în funcție de logaritmi în bază 3, folosind formula de schimbare a bazei, apoi, pentru toate cele trei numere, vom descompune în factori primi numerele de la argumentele logaritmilor:

$$a = \log_3(5^2 \cdot 3) = \log_3 5^2 + \log_3 3 = 2\log_3 5 + 1$$

$$b = \log_3(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 5 = 2\log_3 2 + \log_3 5 + 1$$

Notăm $c = \log_{12} 40$.

$$c = \frac{\log_3 40}{\log_3 12} = \frac{\log_3(2^3 \cdot 5)}{\log_3(2^2 \cdot 3)} = \frac{\log_3 2^3 + \log_3 5}{\log_3 2^2 + \log_3 3} = \frac{3\log_3 2 + \log_3 5}{2\log_3 2 + 1}$$

Din prima relație, deducem că $\log_3 5 = \frac{a-1}{2}$, iar din a doua, $\log_3 2 = \frac{b-1-\log_3 5}{2}$, așadar:

$$\log_3 5 = \frac{a-1}{2}$$

$$\log_3 2 = \frac{b-1-\log_3 5}{2} = \frac{b-1-\frac{a-1}{2}}{2} = \frac{2b-a-1}{4}$$

Înlocuind cei doi logaritmi în expresia lui $c$, găsim:

$$c = \frac{3 \cdot \frac{2b-a-1}{4} + \frac{a-1}{2}}{2 \cdot \frac{2b-a-1}{4} + 1} = \frac{6b - 3a - 3 + 2a - 2}{4b - 2a - 2 + 4} = \frac{6b - a - 5}{4b - 2a + 2}$$

**5. Demonstrați că expresia $T(x) = (2\log_5 x^2 - 1)^2 + 2\log_5 x^4 - \log_5^2 x^4$, definită pentru $x > 0$ este constantă (nu depinde de $x$).**

**Atenție! Pentru $a, x > 0, a \neq 1, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$:**

$$\log_a^p x^q = (\log_a x^q)^p = (q \log_a x)^p = q^p \cdot \log_a^p x$$

Observații:

- Exponentul logaritmului NU iese în fața logaritmului
- Exponentul argumentului iese în fața logaritmului la puterea logaritmului.

$$T(x) = (4\log_5 x - 1)^2 + 8\log_5 x - 16\log_5^2 x$$

$$T(x) = 16\log_5^2 x - 8\log_5 x + 1 + 8\log_5 x - 16\log_5^2 x = 1, \forall x > 0$$

Deci $T(x)$ este constantă.

**6. Demonstrați că numărul $N = \left(\frac{2}{3}\right)^{lg5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{lg2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{lg3}$ este număr natural.**

$$N = \frac{2^{lg5}}{3^{lg5}} \cdot \frac{3^{lg2}}{5^{lg2}} \cdot \frac{5^{lg3}}{2^{lg3}}$$

Folosind proprietatea 15, găsim: $2^{lg5} = 5^{lg2}$; $3^{lg5} = 5^{lg3}$ ; $3^{lg2} = 2^{lg3}$, așadar factorii de la numărător se vor simplifica, rând pe rând, cu cei de la numitor:

$$N = \frac{2^{lg5}}{3^{lg5}} \cdot \frac{3^{lg2}}{5^{lg2}} \cdot \frac{5^{lg3}}{2^{lg3}} = 1 \in \mathbb{N}$$

**7. Aflați numărul natural $n$, știind că $\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\right) = ln2 + ln3 - ln11$.**

$$\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} ln\left[\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right] =$$

$$= ln\frac{1\cdot 3}{2^2} + ln\frac{2\cdot 4}{3^2} + \cdots + ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = ln\left[\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot \ldots \cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] =$$

$$ln\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{n+1}\right] = ln\frac{n+2}{2(n+1)}$$

Egalitatea din enunț devine: $ln\frac{n+2}{2(n+1)} = ln2 + ln3 - ln11 \Leftrightarrow ln\frac{n+2}{2(n+1)} = ln6 - ln11 = \ln\frac{6}{11}$

de unde deducem $\frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow 11n + 22 = 12n + 12 \Leftrightarrow n = 10 \in \mathbb{N}$.

**8. Calculați media geometrică a numerelor**

$\boldsymbol{a = \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_5 \sqrt[81]{5}\right)\right)}$**;** $\boldsymbol{b = 7^{\log_7 6} + \frac{1}{\log_9\sqrt{3}}}$ **și** $\boldsymbol{c = 5\cdot\frac{\log_7 1024}{\log_7 2}}$**.**

Media geometrică a trei numere este $m_g = \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$.

$$a = \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_5 \sqrt[81]{5}\right)\right) = \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_5 5^{\frac{1}{81}}\right)\right) = \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81}\right) = \log_2 4 = 2$$

$$b = 7^{\log_7 6} + \frac{1}{\log_9\sqrt{3}} = 6 + \log_{\sqrt{3}} 9 = 6 + 4 = 10$$

$$c = 5\cdot\frac{\log_7 1024}{\log_7 2} = 5\log_2 1024 = 5\log_2 2^{10} = 5\cdot 10 = 50.$$

$$m_g = \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} = \sqrt[3]{2\cdot 10\cdot 50} = \sqrt[3]{1000} = 10.$$