Unitatea de învățare	Logaritmi

Videoclip: Condiții de existență pentru logaritmi.

Ce învățăm din videoclip:

- **să identificăm condițiile de existență** (de bună definire) a logaritmilor;
- **să utilizăm conexiuni** între noțiuni studiate anterior și buna definire a logaritmilor;
- **să alegem strategii potrivite de rezolvare** pentru optimizarea calculelor.

De câte ori lucrăm cu logaritmi, trebuie să avem grijă ca aceștia să îndeplinească condițiile de existență. Pentru $\log_a b$, condițiile de existență sunt următoarele:

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$$

1. **Determinați domeniul de existență pentru expresia: $\log_2\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$**

Pentru că baza, 2, satisface condițiile de existență (este strict mai mare ca 0 și diferit de 1), nu bazei îi vom impune condiții de existență, ci argumentului:

$$2-\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{ bază subunitară}} x > -1$$

$$x \in (-1, \infty)$$

2. **Determinați domeniul de existență pentru expresia: $\log_{1-|x+2|} 3$.**

De această dată, argumentul este constant și nu necesită condiții de existență. Însă, vom impune condiții de existență pentru bază:

$$\begin{cases} 1-|x+2| > 0 \\ 1-|x+2| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| < 1 \\ |x+2| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x+2 < 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3,-1)\setminus\{-2\}$$

În a doua condiție, am folosit faptul că mudulul unui număr real este 0, dacă și numai dacă numărul este 0, așadr $|x+2| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Domeniul de existență al expresiei este $(-3,-1)\setminus\{-2\}$.

3. **Există numere reale x pentru care $\log_{x-5}(x-7)^2 = 2$?**

Dacă există astfel de numere, urmează să le găsim. Dacă nu există astfel de numere, ar putea exista două situații: fie nu există nicio valoare a lui x pentru care logaritmul să fie bine definit, fie domeniul de existență al logaritmului este mulțime nevidă, dar niciun element al acestui domeniu nu verifică egalitatea dată.

Impunem, mai întâi condiții de existență: $\begin{cases} x-5>0 \\ x-5\neq 1 \\ (x-7)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x\neq 6 \\ x\neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(5,\infty)\backslash\{6,7\}=D_{ex}$

Din definiția logaritmului, numărul 2, valoarea logaritmului, este puterea la care se ridică baza $(x-5)$ pentru a obține argumentul $(x-7)^2$. Putem scrie această egalitate sub forma:

$(x-5)^2=(x-7)^2 \Leftrightarrow x^2-10x+25=x^2-14x+49 \Leftrightarrow 4x=24 \Leftrightarrow x=6 \notin D_{ex}$

De remarcat este faptul că, deși am găsit o valoare a lui x pentru care $(x-5)^2=(x-7)^2$, acesta nu face parte din domeniul de existență al logaritmului.

Răspunsul la întrebare este: NU! Nu există nicio valoare a lui x pentru care egalitatea dată este adevărată. De altfel, dacă înlocuiți x cu 6, obțineți baza logaritmului egală cu 1, ceea ce nu este permis, pentru că logaritmul nu s-a definit pentru bază 1.

4. **Aflați mulțimea valorilor reale ale numărului m, pentru care**

$\lg[mx^2+(m+1)x+m+1]$ există, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Baza logaritmului este 10. Existența logaritmului pentru orice număr real x înseamnă:

$$mx^2+(m+1)x+m+1>0, \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Deci, funcția din membrul stâng, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2+(m+1)x+m+1$, trebuie să păstreze același semn, (+), pe toată mulțimea numerelor reale. Dacă $m=0$, funcția devine $f(x)=x+1$, care nu păstrează semn constant pe $\mathbb{R}$, deci $m=0$ nu convine.

Dacă $m\neq 0$, atunci $f(x)=mx^2+(m+1)x+m+1$ este funcție de gradul al doilea și va fi pozitivă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă: $\begin{cases} \Delta<0 \ (parabola\ nu\ intersectează\ axa\ Ox) \\ m>0 \ (parabola\ are\ ramurile\ "în\ sus" \end{cases}$

$$\Delta=(m+1)^2-4m(m+1)=(m+1)(m+1-4m)=(m+1)(1-3m)$$

$$\Delta<0 \Leftrightarrow (m+1)(1-3m)<0 \Leftrightarrow m\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},\infty)$$

Dar, din a doua condiție, $m>0$. Intersectând cele două intervale, obținem $m\in(\frac{1}{3},\infty)$.