Capitolul	Mulțimea numerelor reale

Unitatea de învățare	Logaritmi: definire; condiții de existență

Breviar teoretic

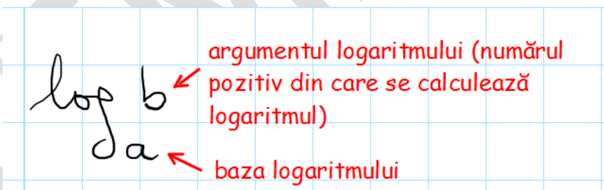
Pornind de la egalitatea $a^x = b$, unde $a, b > 0, a \neq 1$, care admitem că are o unică soluție, nu totdeauna simplu de găsit, logaritmul dintr-un număr pozitiv se definește ca soluție a unei astfel de ecuații.

Definiție:

Fie $a, b > 0, a \neq 1$. Logaritmul în bază a din numărul b, notat $\log_a b$, este exponentul puterii cu bază a din care se obține numărul b.

Cu alte cuvinte, $\log_a b$ este puterea la care se ridică a pentru a-l obține pe b.

$$a^{\log_a b} = b$$



Exemple:

1. $2^{\log_2 3} = 3$

2. $\log_3 \frac{1}{3}$ este puterea la care se ridică 3 pentru a-l obține pe $\frac{1}{3}$. Cum $3^{-1} = \frac{1}{3}$, rezultă că

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

3. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$ este puterea la care se ridică $\frac{1}{5}$ pentru a-l obține pe $\sqrt{5}$. Folosind proprietățile

puterilor cu exponent rațional, $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$, deci $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$.

4. $\log_{10} 1000000000 = \log_{10} 10^9 = 9$ (puterea la care se ridică 10 pentru a obține 10^9).

Aplicații

1. Calculați: $3^{\log_3 7} + \log_{\frac{1}{7}} 49 - \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64}$.

$3^{\log_3 7} = 7$ (puterea la care se ridică 3 pentru a-l obține pe 7 este $\log_3 7$)

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = -2$ (pentru că $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 7^2 = 49$)

$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64} = -12$ (pentru că $\left(\sqrt{2}\right)^{-12} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$)

Deci, $3^{\log_3 7} + \log_{\frac{1}{7}} 49 - \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{64} = 7 + (-2) - (-12) = 7 - 2 + 12 = 17.$

2. Calculați media geometrică a numerelor

$$\boldsymbol{a = \log_5 5 + \log_2 32,\ b = \log_{\sqrt[4]{5}} 625 - \log_\pi \pi^8 - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{4}}\ \textbf{și}\ \boldsymbol{c = \log_{\sqrt[9]{6}} 6.}$$

$5 = 5^1$ (puterea la care se ridică baza 5 pentru a-l obține pe 5 este 1) $\Rightarrow \log_5 5 = 1$

$32 = 2^5$ (puterea la care se ridică baza 2 pentru a-l obține pe 32 este 5) $\Rightarrow \log_2 32 = 5$

Deci, $a = 1 + 5 = 6.$

$625 = 5^4 = \left[\left(\sqrt[4]{5}\right)^4\right]^4 = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{16}$ (puterea la care se ridică baza $\sqrt[4]{5}$ pentru a-l obține pe 625 este 16) $\Rightarrow \log_{\sqrt[4]{5}} 625 = 16$

$\log_\pi \pi^8 = 8$ (puterea la care se ridică baza π pentru a-l obține pe π^8 este 8)

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ (puterea la care se ridică baza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pentru a-l obține pe $\frac{1}{4}$ este 4) $\Rightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{4} = 4$

Deci, $b = 16 - 8 - 4 = 4$

$6 = \left(\sqrt[9]{6}\right)^9$ (puterea la care se ridică baza $\sqrt[9]{6}$ pentru a-l obține pe 6 este 9) $\Rightarrow \log_{\sqrt[9]{6}} 6 = 9$

Deci, $c = 9.$

Media geometrică a celor trei numere: $a = 6,\ b = 4$ și $c = 9$ este:

$$m_g(a,b,c) = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[3]{6 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6$$

Notații:

$\log_{10} b \xrightarrow{notăm} \lg b\,, b > 0$ (se numește logaritm zecimal, iar prin scriere ”lg” subînțelegem baza logaritmului ca fiind 10)

$\log_{e} b \xrightarrow{notăm} \ln b\,, b > 0$ (se numește logaritm natural, iar prin scriere ”ln” subînțelegem baza logaritmului ca fiind e, număr irațional între 2 și 3, $e \cong 2{,}71$)

Din definiția logaritmului remarcăm că acesta are, din start, anumite condiții de definire, condiții care derivă din egalitatea $a^x = b$, unde $a, b > 0, a \neq 1$.

Condiții de existență pentru logaritmi:
Expresia $\log_A B$ este bine definită, dacă și numai dacă $\begin{cases} \boldsymbol{A > 0} \\ \boldsymbol{A \neq 1} \\ \boldsymbol{B > 0} \end{cases}$**.**

Exemple:

1. Aflați valorile reale ale numărului y pentru care $\log_2(2y+1)$ este bine definit.

Cum baza logaritmului este 2, număr pozitiv și diferit de 1, aceasta îndeplinește condițiile impuse de definiție, deci nu este nevoie să impunem noi astfel de condiții. Argumentul, însă, trebuie să fie și el pozitiv, deci impunem condiția:

$$2y + 1 > 0 \Leftrightarrow y > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

2. Stabiliți domeniul de existență al expresiei $E(x) = \log_{\frac{2x+1}{x+3}} \sqrt[3]{10}$.

Argumentul logaritmului, $\sqrt[3]{10}$, este un număr strict pozitiv, deci nu impunem noi condiția de pozitivitate (aceasta este deja satisfăcută). Impunem, însă, condiții pentru baza logaritmului:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right) \\ \dfrac{2x+1}{x+3} \neq 1 \Leftrightarrow 2x + 1 \neq x + 3 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

Cele două condiții trebuie satisfăcute simultan, deci $D_{ex} = (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{2\}$.

3. Aflați valorile reale ale lui x pentru care este adevărată egalitatea $\log_{|x|}(x+2)=2$.

O astfel de egalitate reprezintă o ecuație logaritmică. Vom dezvolta acest subiect în secțiunea destinată unității de învățare "Ecuații".

Dar egalitatea de mai sus se bazează pe definiția logaritmului, așadar problema poate fi rezolvată, imediat după introducerea noțiunii de logaritm. Pentru ca egalitatea să poată avea loc, este necesar să impunem condiții de existență pentru logaritmul din membrul stâng:

$$\begin{cases} |x|>0 \\ |x|\neq 1 \\ x+2>0 \end{cases}$$

Sistemul de condiții este echivalent cu: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \\ x>-2 \end{cases}$, de unde deducem domeniul de existență al logaritmului: $D_{ex}=(-2,\infty)\setminus\{-1,0,1\}$. Soluția sau soluțiile ecuației nu pot fi din afara acestui domeniu.

Trecând acum la egalitatea dată, conform definiției logaritmului, deducem că 2 (adică logaritmul) este puterea la care se ridică baza $|x|$ pentru a obține argumentul $x+2$.

$$\log_{|x|}(x+2)=2 \Leftrightarrow |x|^2=x+2 \Leftrightarrow x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-1,2\}$$

Cum -1 nu face parte din domeniul de existență, acesta se elimină din mulțimea soluțiilor, iar pentru 2 obținem egalitatea $\log_2 4=2$ care este adevărată.

Mulțimea soluțiilor este $S=\{2\}$.

De reținut!

$$\boldsymbol{\log_a b=c \Leftrightarrow a^c=b}$$

Exemple:

1. $\log_2(3x+1)=4 \Leftrightarrow 3x+1=2^4,\ x>-\frac{1}{3}$

2. $\log_x 3=-2\ \Leftrightarrow x^{-2}=3, x>0, x\neq 1$

3. $\log_3 2=k \Leftrightarrow 3^k=2, k\in\mathbb{R}$.