Unitatea de învățare	Puteri și radicali

Videoclip: Raționalizarea numitorilor

Ce învățăm din videoclip:

- **să identificăm caracteristici** ale numerelor reale scrise sub forma de radicali, în cazul de față, expresii conjugate algebric;
- **să aplicăm** reguli de operare cu radicali;
- **să alegem strategii potrivite de rezolvare** pentru optimizarea calculelor.

Raționalizarea numitorilor presupune amplificarea fracțiilor, care au numitori cu radicali, cu expresii convenabile, pentru a elimina radicalii de la numitor.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

Conjugata unei expresii de forma $\sqrt{a}+b$, cum este numitorul primei fracții, este $\sqrt{a}-b$. Produsul celor două expresii conjugate algebric nu mai conține radicali.

$$(\sqrt{a}+b)\cdot(\sqrt{a}-b)=a-b^2 \text{ (nu mai conține radicali)}$$

Vom amplifica prima fracție cu $\sqrt{2}-1$.

Numitorul celei de-a doua fracții este de forma $\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{a}+b^2$, unde $a=2$ și $b=1$. Conjugata acestei expresii este $\sqrt[3]{a}-b$, produsul celor expresii fiind:

$$(\sqrt[3]{a^2}+b\sqrt[3]{a}+b^2)\cdot(\sqrt[3]{a}-b)=a-b^3 \text{ (nu mai conține radicali).}$$

Vom amplifica a doua fracție cu $\sqrt[3]{2}-1$.

Obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}-\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1-\sqrt[3]{2}+1=\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$$

Vom raționaliza următorul numitor:

2. $\frac{6}{\sqrt[3]{5}+1}$

Numitorul este de forma $\sqrt[3]{a}+b$, unde $a=5$ și $b=1$. Conjugata acestei expresii este

$$\sqrt[3]{a^2}-b\sqrt[3]{a}+b^2$$

produsul celor două expresii fiind: $\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}-b\sqrt[3]{a}+b^2\right)=a+b^3$ (nu mai conține radicali).

Vom amplifica fracția cu $\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1$.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{5}+1}=\frac{6(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}+1)}{5+1}=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1$$

Putem avea, însă, fracții pentru care nu identificăm imediat o conjugată a numitorului, ca în exemplul următor:

3. $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Nu identificăm prea ușor o expresie cu care să amplificăm fracția și să eliminăm rapid radicalii. Așadar, vom grupa termenii și vom încerca să eliminăm radicalii pe rând.

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6-(3+2\sqrt{6}+2)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-2\sqrt{6}}$$

Am reușit, prin această amplificare să obținem un numitor care are o conjugată simplă, cu care putem elimina radicalii. Vom amplifica fracția cu $1+2\sqrt{6}$.

Deci,

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(1+2\sqrt{6})}{1-24}=-\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(1+2\sqrt{6})}{23}$$