

Capitolul Mulțimea numerelor reale

Unitatea de învățare Puteri și radicali: raționalizarea numitorilor

Breviar teoretic

Prin raționalizarea numitorilor înțelegem eliminarea radicalilor de la numitorii fracțiilor. Raționalizarea numitorilor presupune amplificarea fracțiilor cu expresii convenabile, astfel încât la numitor să se obțină numere sau expresii fără radicali.

Definiție:

Două expresii (sau numere) care conțin radicali se numesc conjugate algebric, dacă produsul lor nu mai conține radicali.

Exemple:

1. $\sqrt[3]{3}$ și $\sqrt[3]{9}$ sunt numere care conțin radicali, dar $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$ nu mai conține radicali. Deducem că $\sqrt[3]{3}$ și $\sqrt[3]{9}$ sunt numere conjugate algebric.

2. $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sunt expresii care conțin radicali, dar $(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 3 - 5 = -2$ nu mai conține radicali. Expresiile $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ și $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sunt conjugate algebric.

Pentru raționalizarea numitorilor și pentru optimizarea calculelor este important să cunoaștem perechi de numere/expresii conjugate. Acestea sunt deduse pe baza [formulelor algebrice](#) cunoscute, a operațiilor cu radicali și a proprietăților acestora.

Perechi de numere/expresii conjugate uzuale		Produsul celor două numere/expresii conjugate algebric	Condiții de definire
\sqrt{a}	\sqrt{a}	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$a > 0$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$	$a \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} = a$	$a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$\sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[n]{a^{n-k}}$	$\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$	$a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \in \mathbb{N}, k < n$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$	$a, b > 0$
$\sqrt{a} - b$	$\sqrt{a} + b$	$(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$	$a > 0, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$	$a, b \in \mathbb{R}$

Perechi de numere/expresii conjugate uzuale		Produsul celor două numere/expresii algebric conjugate	Condiții de definire
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} - b$	$\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$	$(\sqrt[3]{a} - b)(\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2) = a - b^3$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a} + b$	$\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$	$(\sqrt[3]{a} + b)(\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2) = a + b^3$	$a, b \in \mathbb{R}$

Observație: Conjugata unei expresii de pe prima coloană se găsește în a doua coloană, iar conjugata expresiei de pe a doua coloană este perechea ei de pe prima coloană. Trebuie să acordați atenție ambelor coloane pentru a recunoaște ușor conjugatele acestor expresii.

Generalizare:

1. Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, și $a, b > 0$, expresiile

$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ și $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}b^2} + \dots + \sqrt[n]{b^n}$ sunt conjugate algebric și

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}b^2} + \dots + \sqrt[n]{b^n}) = a - b$$

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, și $a, b \in \mathbb{R}$, expresiile

$\sqrt[2n+1]{a} + \sqrt[2n+1]{b}$ și $\sqrt[2n+1]{a^{2n}} - \sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b} + \sqrt[2n+1]{a^{2n-2}b^2} - \dots - \sqrt[2n+1]{ab^{2n-1}} + \sqrt[2n+1]{b^{2n}}$ sunt conjugate algebric și

$$(\sqrt[2n+1]{a} + \sqrt[2n+1]{b})(\sqrt[2n+1]{a^{2n}} - \sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b} + \sqrt[2n+1]{a^{2n-2}b^2} - \dots - \sqrt[2n+1]{ab^{2n-1}} + \sqrt[2n+1]{b^{2n}}) = a + b$$

Exemple:

1. Conjugatul algebric al numărului $\sqrt[7]{3^4}$ este numărul $\sqrt[7]{3^3}$. Produsul celor două numere este 3.

2. Conjugata algebrică a expresiei $\sqrt{x^2 + 1} - x$ ($x \in \mathbb{R}$) este expresia $\sqrt{x^2 + 1} + x$. Produsul lor este:

$$(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x) = x^2 + 1 - x^2 = 1$$

3. Conjugata algebrică a expresiei $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$ este $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$. Produsul lor este:

$$(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = 3 + 2 = 5$$

Exemple de raționalizări ale numitorilor:

1. $\frac{3}{\sqrt[4]{6}}$

$$\frac{\sqrt[4]{6^3}}{\sqrt[4]{6}} = \frac{3\sqrt[4]{6^3}}{6} = \frac{\sqrt[4]{216}}{2}$$

2. $\frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{3}$$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{6+2}}{1} + \frac{\sqrt{7-\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5+2}}{\sqrt{5}-2} + \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \frac{\sqrt{5+2}}{5-4} + \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{4-5} = \sqrt{5+2} + \sqrt{7}-\sqrt{5} = 2+\sqrt{7}$$

4. $\frac{5}{\sqrt[3]{2}-3}$

$$\frac{\sqrt[3]{2+3\sqrt{2+3^2}}}{5} = \frac{5(\sqrt[3]{2^2+3\sqrt{2}+3^2})}{2-3^3} = \frac{5(\sqrt[3]{4+3\sqrt{2}+9})}{-25} = -\frac{\sqrt[3]{4+3\sqrt{2}+9}}{5}$$

5. $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

$$\frac{\sqrt[3]{3+1}}{4} = \frac{4(\sqrt[3]{3}+1)}{3+1} = \sqrt[3]{3}+1$$

6. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}}$

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{2}}}{1} = \frac{\sqrt[5]{5\sqrt[3]{4+\sqrt{2}}}}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(25+5\sqrt[3]{4+\sqrt{2}}+\sqrt{16})}{5^3-4} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(25+5\sqrt[3]{4+\sqrt{2}}+\sqrt{16})}{121}$$

7. $\frac{12}{\sqrt[6]{108}+\sqrt[3]{2}-\sqrt{12}-2}$

$$\begin{aligned} \frac{12}{\sqrt[6]{108}+\sqrt[3]{2}-\sqrt{12}-2} &= \frac{12}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^3}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt{3}-2} = \frac{12}{\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^5}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt{3}-2} = \\ &= \frac{12}{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}-2(\sqrt{3}+1)} = \frac{12}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[3]{2}-2)} = \frac{12(\sqrt{3}-1)(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4)}{(3-1)(2-8)} = \\ &= -(\sqrt{3}-1)(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4) \end{aligned}$$

8. $\frac{1}{\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{2}+1}$

$$\frac{\sqrt[5]{2+1}}{1} = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{2+1} = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{3}$$