MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Unitatea de învățare	Puteri și radicali

Videoclip: Operaţii cu radicali şi proprietăţi

Ce învăţăm din videoclip:

- **să identificăm caracteristici** ale numerelor reale scrise sub forma de radicali sau a unor puteri cu exponenţi raţionali;
- **să aplicăm** reguli de operare cu radicali;
- **să alegem strategii potrivite de rezolvare** pentru optimizarea calculelor.

Vom folosi operaţii cu radicali, proprietăţi ale acestora, dar şi trecerea unui număr scris ca radical în putere cu exponent raţional.

1. **Demonstraţi că numărul** $N = \sqrt{3} \bullet \sqrt[4]{3} \bullet \sqrt[8]{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[1024]{3}$ **este mai mic decât 3.**

Ordinele radicalilor sunt: 2,4,8,...,1024, adică puterile lui 2, de la 2^1 la 2^{10}.

Scriind radicalii sub formă de puteri, găsim:

$$N = 3^{\frac{1}{2}} \bullet 3^{\frac{1}{2^2}} \bullet 3^{\frac{1}{2^3}} \cdot \ldots \cdot 3^{\frac{1}{2^{10}}} = 3^{\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}}$$

Suma de la exponent conţine 10 termeni în progresie geometrică, primul termen fiind $\frac{1}{2}$, iar raţia tot $\frac{1}{2}$.

Folosind expresia sumei a 10 termeni într-o progresie geometrică (clasa a IX-a), găsim:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2} \bullet \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Deci, numărul este

$$N = 3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = 3^{1-\frac{1}{2^{10}}} = 3^{1-\frac{1}{1024}} = 3^{\frac{1023}{1024}} = \sqrt[1024]{3^{1023}} < \sqrt[1024]{3^{1024}} = 3$$

Am folosit egaliatea: $3^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{3^m}$ unde $n = 1024$ şi $m = 1023$, apoi inegalitatea $3^{1023} < 3^{1024}$. Am demonstrat, deci, că $N < 3$.

2. Aflaţi numărul natural a pentru care numărul $P=\sqrt{37+20\sqrt{3}}-\sqrt{37-20\sqrt{3}}$ este egal cu $a\sqrt{3}$.

Vom folosi formulele radicalilor compuşi:

$$\sqrt{37+20\sqrt{3}}=\sqrt{37+\sqrt{400\cdot 3}}=\sqrt{37+\sqrt{1200}}$$

Punem în evidenţă numerele din formulele radicalilor compuşi (revezi breviar teoretic!):

$A=37,\ B=1200$, iar $C=\sqrt{37^2-1200}=\sqrt{1369-1200}=\sqrt{169}=13.$

Deci, $\sqrt{37+20\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{37+13}{2}}+\sqrt{\frac{37-13}{2}}=\sqrt{25}+\sqrt{12}=5+\sqrt{12}=5+2\sqrt{3}.$

Pentru al doilea radical, calculele sunt aceleaşi, doar că se schimbă semnul între cei doi radical nou obţinuţi:

$$\sqrt{37-20\sqrt{3}}=5-2\sqrt{3}$$

$$P=5+2\sqrt{3}-\left(5-2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$$

Cum P trebuia să fie egal cu $a\sqrt{3}$, deducem că $a=4$ şi este număr natural.

3. Demonstraţi că numărul $a=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ este număr natural.

Atenţie!
Formulele radicalilor compuşi nu se aplică în cazul radicalilor de ordin 3.

Vom încerca să găsim alte proprietăţi ale numărului a, adică să transformăm problema în alta mai uşoară.

Dat fiind că numărul nostru conţine radicali de ordinul 3, vom calcula a^3.

$$a^3=\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)^3$$

Pentru calculul membrului drept, vom folosi formula cubului binomului sumă, în forma ei ”grupată”.

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ (forma ”grupată”)

$$a^3 = 10 + 6\sqrt{3} + 10 - 6\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3}) \cdot (10 - 6\sqrt{3})}\left(\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}\right)$$

Ultima paranteză este chiar numărul a, iar produsul de sub radicalul de ordin trei se transformă: $(10 + 6\sqrt{3}) \cdot (10 - 6\sqrt{3}) = 100 - 108 = -8$.

Rezultă că

$$a^3 = 20 + 3a\sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow a^3 = 20 - 6a \Leftrightarrow a^3 + 6a - 20 = 0$$

Vom descompune, convenabil, expresia din membrul stâng al ecuaţiei, pentru a reduce rezolvarea ecuaţiei de gradul al treilea, la rezolvarea unei ecuaţii de gradul I, şi a unei ecuaţii de gradul al doilea.

$$a^3 + 6a - 20 = a^3 - 4a + 10a - 20 = a(a^2 - 4) + 10(a - 2) =$$

$$= a(a - 2)(a + 2) + 10(a - 2) = (a - 2)(a^2 + 2a + 10).$$

Ecuaţia se scrie: $(a - 2)(a^2 + 2a + 10) = 0$ ceea ce conduce la :

$$a - 2 = 0$$

sau

$$a^2 + 2a + 10 = 0$$

Cum a doua ecuaţire nu are soluţii reale ($\Delta = 4 - 40 < 0$), iar a este un număr real, rezultă că doar prima egalitate este posibilă, deci $a = 2 \in N$.