

Breviar teoretic

Proprietăți ale radicalilor și operații cu radicali:

	Radicali de ordin par ($2n, n \in \mathbb{N}^*$)	Radicali de ordin impar ($2n + 1, n \in \mathbb{N}^*$)
1.	$\sqrt[k]{a^p} = a^{\frac{p}{k}}, \forall a > 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \forall p \in \mathbb{Z}$	
2.	$\sqrt[2n]{a \cdot b} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b}, \forall a, b \geq 0$	$\sqrt[2n+1]{a \cdot b} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$
3.	$\sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p}$ $= \sqrt[2n]{a_1} \cdot \sqrt[2n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{a_p}$ $\forall a_1, a_2, \dots, a_p \geq 0, p \in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[2n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p}$ $= \sqrt[2n+1]{a_1} \cdot \sqrt[2n+1]{a_2} \cdot \dots$ $\cdot \sqrt[2n+1]{a_p}$ $\forall a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*$
4.	$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}, \forall a \geq 0, \forall b > 0$	$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*$
5.	$\sqrt[2n]{a^m} = (\sqrt[2n]{a})^m, \forall a \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[2n+1]{a^m} = (\sqrt[2n+1]{a})^m, \forall a \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}^*$
6.	$\sqrt[2n \cdot k]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[2n]{a^p}, \forall a \geq 0, \forall k, p \in \mathbb{N}^*$, (simplificarea)	$\sqrt[(2n+1) \cdot k]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[2n+1]{a^p}, \forall a \geq 0, \forall k, p \in \mathbb{N}^*$, (dacă $a < 0$ și k este par, iar p impar, această egalitate nu are loc!)
7.	$\sqrt[2n]{a} = \sqrt[2n \cdot k]{a^k}, \forall a \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$ (amplificarea)	$\sqrt[2n+1]{a} = \sqrt[(2n+1) \cdot k]{a^k}, \forall a \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$ (dacă $a < 0$ și k este par, această egalitate nu are loc!)
	$\sqrt[2n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[2n \cdot p]{a}, \forall a \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2$	$\sqrt[2n+1]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[(2n+1) \cdot p]{a}, \forall a \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ Dacă p este impar, egalitatea are loc pentru oricare $a \in \mathbb{R}$.
Compararea radicalilor		
8.	$\sqrt[2n]{a} \leq \sqrt[2n]{b} \Leftrightarrow a \leq b, \text{unde } a, b \geq 0$	$\sqrt[2n+1]{a} \leq \sqrt[2n+1]{b} \Leftrightarrow a \leq b, \text{unde } a, b \in \mathbb{R}$
Scoaterea factorilor de sub radical		
9.	$\sqrt[2n]{a^{2n \cdot k}} = a \cdot \sqrt[2n]{a^k}, \forall a \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$	$\sqrt[2n+1]{a^{(2n+1) \cdot k}} = a \cdot \sqrt[2n+1]{a^k}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*$ impar $\sqrt[2n+1]{a^{(2n+1) \cdot k}} = a \cdot \sqrt[2n+1]{a^k}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*$ par

Introducerea factorilor sub radical	
10.	$a \cdot \sqrt[2n]{b} = \sqrt[2n]{a^{2n} \cdot b}, \forall a, b \geq 0$ $a \cdot \sqrt[2n]{b} = -\sqrt[2n]{a^{2n} \cdot b}, \forall b \geq 0, \forall a < 0$
	$a \cdot \sqrt[2n+1]{b} = \sqrt[2n+1]{a^{2n+1} \cdot b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Exemple:

1. Comparați numerele: $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ și $\sqrt[5]{\frac{1}{25}}$.

Dat fiind că radicalii nu au același ordin, nu putem folosi direct proprietatea 8. Fie scriem radicalii ca puteri cu aceeași bază și exponenți raționali, fie aducem radicalii la același ordin.

Varianta 1: $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$, iar $\sqrt[5]{\frac{1}{25}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$. Cum baza este subunitară, ordinea dintre exponenți se va schimba între puteri. Comparăm exponenții: $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{5}} > \sqrt[5]{\frac{1}{25}}$.

Varianta 2: Cel mai mic multiplu comun al ordinelor celor doi radicali este 15. Vom aduce ambii radicali la ordin 15, prin amplificare:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3 \cdot 5]{\left(\frac{1}{5}\right)^5} = \sqrt[15]{\frac{1}{3125}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{25}} = \sqrt[5 \cdot 3]{\left(\frac{1}{25}\right)^3} = \sqrt[15]{\frac{1}{15625}}$$

Cum $\frac{1}{3125} > \frac{1}{15625}$, rezultă, conform proprietății 8, $\sqrt[15]{\frac{1}{3125}} > \sqrt[15]{\frac{1}{15625}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{5}} > \sqrt[5]{\frac{1}{25}}$.

2. Demonstrați că numărul $N = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$ este număr natural.

Pentru efectuarea înmulțirii celor doi radicali, vom aduce primul radical la ordin 6

$$N = \sqrt[3 \cdot 2]{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$N = \sqrt[6]{9-8} = \sqrt[6]{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

Se calculează numărul $C = \sqrt{A^2 - B}$. Dacă acesta este număr rațional, iar A este tot un număr rațional, atunci este convenabilă transformarea:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Exemple:

1. $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$

Radicalul trebuie adus la forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$, deci prima dată introducem factorul 3 sub radical:

$$\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{7 + \sqrt{45}}, \text{ de unde } A = 7, B = 45, \text{ iar } C = \sqrt{49 - 45} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{7+2}{2}} + \sqrt{\frac{7-2}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2}$$

2. $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$

Radicalul trebuie adus la forma $\sqrt{A - \sqrt{B}}$, deci prima dată introducem factorul 4 sub radical:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{9 - \sqrt{32}}, \text{ de unde } A = 9, B = 32, \text{ iar } C = \sqrt{81 - 32} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9+7}{2}} - \sqrt{\frac{9-7}{2}} = \sqrt{8} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

3. $\sqrt{6 + \sqrt{3}}$

Cum $A = 6, B = 3$ și $C = \sqrt{36 - 3} = \sqrt{33}$, radicalul inițial devine:

$\sqrt{6 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{33}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{33}}{2}}$, formă care este mai complicată decât cea inițială, deci nu putem conta pe optimizarea calculului în această formă. Transformarea NU este avantajoasă în acest caz.

Media aritmetică, media geometrică și media armonică a n numere pozitive

Dacă a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere strict pozitive, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci:

$$m_a(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \text{media aritmetică a celor } n \text{ numere}$$

$$m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} - \text{media geometrică a celor } n \text{ numere}$$

$$m_h(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} - \text{media armonică a celor } n \text{ numere}$$

Inegalitatea mediilor:

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ are loc inegalitatea:

$$m_h(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq m_g(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq m_a(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Pentru 2 numere strict pozitive a, b :

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Pentru 3 numere strict pozitive, a, b, c :

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$