

Capitolul      Mulțimea numerelor reale

Unitatea de învățare      Puteri și radicali: radicalul de ordin  $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  - definiție

### Breviar teoretic

Reamintim teorema din secțiunea "Puteri cu exponent rațional" care permite introducerea radicalului de ordin  $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

**Teoremă:**

Pentru fiecare număr  $a \geq 0$  și pentru fiecare număr natural  $n \geq 2$ , ecuația  $x^n = a$  are o unică soluție pozitivă.

**Observație:** Teorema afirmă că există un singur număr mai mare sau egal ca 0 a cărei putere a  $n$ -a este egală cu un număr pozitiv dat,  $a \geq 0$ .

Această soluție unică are două notații posibile:

$a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}$
Notația ne-a permis introducerea noțiunii de putere cu exponent rațional a unui număr pozitiv, iar ulterior a noțiunii de putere cu exponent real a unui număr strict pozitiv.	Notația permite introducerea noțiunii de radical de ordin $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și studierea unor proprietăți și a operațiilor cu radicali.

Cele două notații pentru unica soluție a ecuației date conduc la egalitățile:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall a \geq 0$$

$(\sqrt[n]{a})^n = a, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$  și  $a \geq 0$  - numărul  $\sqrt[n]{a}$  verifică ecuația dată (este soluție a ecuației).

Dacă  $a = 0$ , unica soluție a ecuației  $x^n = 0$  este  $x = 0$ , deci:  $\sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

În prezentul breviar teoretic vom folosi notația  $\sqrt[n]{a}$  care se citește "radical de ordin  $n$  din  $a$ ".

## Radical de ordin par dintr-un număr pozitiv

### Definiție:

Unica soluție pozitivă a ecuației  $x^{2p} = a$ , unde  $a \geq 0$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  se notează  $\sqrt[2p]{a}$  și se numește radicalul de ordin  $2p$  din numărul pozitiv  $a$ .

### Observații:

- radicalul de ordin par se definește doar pentru numere pozitive;
- radicalul de ordin par dintr-un număr pozitiv este, el însuși, un număr pozitiv;
- $\sqrt[2]{a} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a}, \forall a \geq 0$  (se numește rădăcina pătrată a numărului pozitiv  $a$ ).
- $\sqrt[2p]{a}$ , pentru  $a \geq 0$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  se numește rădăcina de ordin  $2p$  a numărului pozitiv  $a$ .
- $\sqrt[2p]{0} = 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$ ;
- $(\sqrt[2p]{a})^{2p} = a, \forall a \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$ . ( $\sqrt[2p]{a}$  este soluție a ecuației  $x^{2p} = a$ , deci verifică ecuația).
- $\sqrt[2p]{a^{2p}} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$ .

Pentru orice număr real  $a$ , puterea cu exponent par a lui  $a$  este un număr pozitiv, deci poate fi definit  $\sqrt[2p]{a^{2p}}$ , dar, prin definiție, acest radical este și el un număr pozitiv, chiar dacă numărul  $a$  este negativ.

Ceea ce înseamnă că, dacă  $a < 0$ , atunci  $\sqrt[2p]{a^{2p}} \neq a$ .

### Exemple:

1.  $(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
2.  $\sqrt[4]{5^4} = 5$
3.  $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

În exemplele 2 și 3, membrul stâng conține același număr:

$$5^4 = (-5)^4 = 625, \text{ deci } \sqrt[4]{5^4} = \sqrt[4]{(-5)^4} = 5 = |-5|.$$

### Condițiile de existență pentru radicalul de ordin par derivă din definiție:

$$\sqrt[2p]{E(x)} \text{ este definit dacă și numai dacă } E(x) \geq 0.$$

### Exemple:

1. Aflați valorile reale ale lui  $x$  pentru care  $\sqrt[6]{x^2 - 5x + 6}$  este bine definit.

Cum radicalul are ordin 6, deci ordin par, condiția care trebuie satisfăcută este  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ , care este o inecuație de gradul al doilea. Folosim tabelul de semn al funcției de gradul al doilea.

Ecuația atașată,  $x^2 - 5x + 6 = 0$  are discriminantul  $\Delta = 25 - 24 = 1$ , iar soluțiile ( $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ) sunt  $x_1 = 2$  și  $x_2 = 3$ .

Soluția inecuației este:

$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-
	+	+	0	+

2. Aflați valorile reale ale numărului  $y$  pentru care expresia  $E(y) = \sqrt{|y-1|} + \sqrt[4]{y^2+3}$  este bine definită.

Ambii radicali sunt de ordin par, deci pentru fiecare dintre ei impunem condițiile de existență:

$$\begin{cases} |y-1| \geq 0 \text{ (adevărată } \forall y \in \mathbb{R}) \\ y^2 + 3 \geq 0 \text{ (adevărată } \forall y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Prima inegalitate este adevărată din definiția modulului unui număr real, a doua inegalitate este adevărată pentru că în membrul stâng apare suma a două numere reale pozitive.

Deci, domeniul de existență al expresiei  $E(y)$  este  $\mathbb{R}$ .

3. Determinați valorile reale ale numărului  $a$  pentru care numărul  $N(a) = \sqrt{1-a} + \sqrt[12]{a-1}$  există.

Condițiile de existență pentru cei doi radicali de ordin par sunt:

$$\begin{cases} 1-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 1] \\ a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1 \Leftrightarrow a \in [1, \infty) \end{cases}$$

Cum radicalii trebuie să existe simultan pentru ca numărul să fie definit, cele două intervale se intersectează, deci  $a \in \{1\}$ , iar în acest caz,  $N(1) = 0 \in \mathbb{R}$ .

4. Stabiliți dacă  $\exists x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\sqrt[8]{2-x} + \sqrt[6]{x-3} = 1$ .

Înainte de a verifica egalitatea, stabilim în ce condiții există radicalii (de ordin par) din membrul stâng, simultan.

Condițiile de existență simultană sunt:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 2] \\ x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow a \in [3, \infty) \end{cases}$$

Dar  $(-\infty, 2] \cap [3, \infty) = \emptyset$ , deci membrul stâng al egalității nu poate fi definit pentru niciun număr real. În consecință, nu poate fi vorba de vreo egalitate a lui cu un număr real. Răspunsul la întrebare este : nu există  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\sqrt[8]{2-x} + \sqrt[6]{x-3} = 1$ .

5. Determinați mulțimea valorilor parametrului  $m \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\sqrt[6]{x^2 - 2(m+1)x + m + 3}$  să existe pentru orice număr real  $x$ .

Condiția din enunț, dat fiind că radicalul are ordin par, se rescrie:

$$x^2 - 2(m+1)x + m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

ceea ce înseamnă că funcția de gradul al doilea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin

$f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m + 3$ , are doar valori pozitive, indiferent de valorile reale ale lui  $x$ . Funcția păstrează același semn, sau ia valoarea 0, dacă  $\Delta \leq 0$ . În acest caz, semnul funcției este semnul coeficientului dominant.

Coeficientul dominant al funcției  $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m + 3$  este  $1 > 0$ , deci, dacă  $\Delta \leq 0$ , atunci această funcție va avea doar valori pozitive sau va fi nulă.

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m+3) = 4m^2 + 4m - 8 = 4(m^2 + m - 2)$$

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(m^2 + m - 2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$m \in [-2, 1].$$

$m$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$m^2+m-2$	+	+	0	+
			$m \in [-2, 1]$	

### Radical de ordin impar dintr-un număr real

#### Teoremă:

Pentru fiecare număr  $a \in \mathbb{R}$  și pentru fiecare număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$ , ecuația  $x^{2n+1} = a$  are o unică soluție reală.

#### Definiție:

Unica soluție reală a ecuației  $x^{2p+1} = a$ , unde  $a \in \mathbb{R}$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  se notează  $\sqrt[2p+1]{a}$  și se numește radicalul de ordin  $2p + 1$  din numărul real  $a$ .

Diferența majoră între radicalul de ordin impar, definit aici, și radicalul de ordin par, este aceea că primul se poate defini și pentru numere negative.

#### Observații:

- radicalul de ordin impar se definește pentru orice număr real;
- dacă  $a \geq 0$ , atunci  $\sqrt[2p+1]{a} \geq 0$  și reciproc;
- dacă  $a < 0$ , atunci  $\sqrt[2p+1]{a} < 0$  și reciproc;
- $\sqrt[2p+1]{a}$ , pentru  $a \in \mathbb{R}$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  se numește rădăcina de ordin  $2p + 1$  a numărului real  $a$ .
- $\sqrt[2p+1]{0} = 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$ ;
- $(\sqrt[2p+1]{a})^{2p+1} = a, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$ . ( $\sqrt[2p+1]{a}$  este soluție a ecuației  $x^{2p+1} = a$ , deci verifică ecuația).
- $\sqrt[2p+1]{a^{2p+1}} = a, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$ .

- ${}^{2p+1}\sqrt{-a} = -{}^{2p+1}\sqrt{a}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*$  (cum  $({}^{2p+1}\sqrt{-a})^{2p+1} = -a$  și  $(-{}^{2p+1}\sqrt{a})^{2p+1} = (-1)^{2p+1} \cdot ({}^{2p+1}\sqrt{a})^{2p+1} = -a$ , iar soluția ecuației  $x^{2p+1} = -a$  este unică, rezultă egalitatea celor două numere.)

**Exemple:**

1.  $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

2.  $(\sqrt[3]{-3})^3 + \sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[7]{(-3)^7} = -3 + |-3| + (-3) = -3 + 3 - 3 = -3$

3.  $\sqrt[9]{-512} = -\sqrt[9]{512} = -\sqrt[9]{2^9} = -2$

Pentru radicalul de ordin impar nu impunem condiții speciale de existență, acesta fiind definit pentru orice număr real. Este suficient ca expresiile de sub radicalul de ordin impar să existe, deci să fie numere reale.

Exemple:

1. Aflați valorile reale ale lui  $a$  pentru care expresia  $E(a) = \sqrt[3]{\frac{a+3}{a^2-4}}$  este bine definită.

Cum radicalul este de ordin 3, deci impar, este suficient ca fracția de sub radical să existe, ceea ce înseamnă că numitorul ei trebuie să fie diferit de zero.

$$a^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq 4 \Leftrightarrow |a| \neq 2 \Leftrightarrow a \neq \pm 2, \text{ deci } a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$$

2. Pentru ce numere  $x$ , expresia  $E(x) = \sqrt[4]{7-3x} \sqrt{2x-3}$  este bine definită?

Remarcăm faptul că numărul  $x$  apare și la ordinul radicalului și sub radical. Pe de altă parte, radicalul exterior este de ordin par, deci numărul  $\sqrt[7-3x]{2x-3}$  trebuie să fie mai mare sau egal ca 0.

Numărul  $7-3x$  poate fi ordinul unui radical doar dacă este număr natural, mai mare sau egal ca 2, iar  $\sqrt[7-3x]{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 0$

$$\begin{cases} 7-3x \in \mathbb{N} \text{ și } 7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3} \text{ și } 3x \in \mathbb{Z} \\ 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Deci,  $x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$  și  $3x \in \mathbb{Z}$ .

Dar  $3x \in \left[\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow 3x \in \{5, 6, 7\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}\right\}$

3. Aflați mulțimea valorilor reale ale numărului  $u$ , pentru care numărul  $N(u) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{u}} - \sqrt[4]{3 - |u|}$  este bine definit.

Primul radical, având ordin impar, există din orice număr real, dar vom impune condiție de existență pentru numărul  $\frac{1}{u}$ , ceea ce înseamnă  $u \neq 0$ . (1)

Al doilea radical are ordin par, deci are nevoie de condiția de existență:  $3 - |u| \geq 0 \Leftrightarrow |u| \leq 3$ , de unde  $u \in [-3, 3]$ . (2).

Cum cei doi radicali trebuie să existe simultan, din (1) și (2) deducem  $u \in [-3, 3] \setminus \{0\}$ .

MATEMATRIX